

1. ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ ТА ЛІНІЙНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

1.1. Підпростори векторних просторів, поняття прямої суми. Означення векторного простору. Найпростіші властивості векторних просторів. Поняття лінійного відображення. Простір лінійних відображень. Композиція лінійних відображень та її властивості. Мономорфізми, епіморфізми та ізоморфізми векторних просторів. Поняття базису векторного простору. Формулювання леми Цорна. Доведення існування базису. Теорема про поняття розмірності скінченно вимірного простору. Скінченні бази та ізоморфізми з координатним простором. Сума і перетин підпросторів.

1.2. Матриця лінійного відображення. Лінійні відображення, приклади. Бієкція між лінійними відображеннями та їх обмеженнями на базис. Матриця лінійного відображення. Заміна базису. Матриця переходу, матриця заміни координат та їх зв'язок. Перетворення координат вектора і матриці лінійного відображення при заміні базису. Спряження матриць. Матриця добутку лінійних операторів. Поняття категорії та функтора. Ядро і образ лінійного відображення. Теорема про розмірність ядра та образу. Теорема про монотонність розмірності. Принцип Діріхле для скінченно вимірних векторних просторів. Теорема про розмірності простору та підпростору.

1.3. Застосування понять базису та лінійного відображення. Розклад многочлена в точці. Формула Тейлора. Задача інтерполяції. Формула Лагранжа. Формула Ньютона. Кільце многочленів від багатьох змінних. Однорідні многочлени. Поняття симетричного многочлена. Поняття гомогенного та елементарного симетричного многочлена.

1.4. Поняття факторпростору. Еквівалентність, визначена підпростором. Операції на класах еквівалентності, коректність їх визначення. Поняття фактор простору, перевірка для нього аксіом векторного простору. Розмірність фактор простору. Універсальна властивість факторпростору. Теорема про ізоморфізм факторпростору за ядром та образу. Наслідок про послідовну факторизацію.

1.5. Поняття прямої суми. Поняття прямої суми. Відображення, пов'язані з прямою сумою та співвідношення між ними. Лінійні відображення в пряму суму. Лінійні відображення з прямої суми. Лінійні відображення між прямими сумами. Формула Грасмана. Внутрішня пряма сума, еквівалентність різних означень. Поняття повної системи ортогональних ідемпотентів. Поняття інваріантного підпростору. Індуковані відображення підпростору та фактор-простору. Власний вектор, власне значення. Характеристичний поліном матриці та лінійного відображення. Незалежність власних векторів та наслідок з неї. Поліноми від лінійного оператора та поліноми від матриці, їх властивості. Твердження про поліноми від матриць та інваріантні підпростори. Поняття нільпотентного оператора. Лема про степінь нільпотентності. Поняття кореневого простору. Дія лінійних поліномів від оператора на нільпотентних просторах. Зв'язок між кореневими та власними векторами. Анулюючий та мінімальний поліноми оператора, зв'язок між ними. Теорема про кореневий розклад. Поняття клітини Жордана. Нормальна форма Жордана (ЖНФ). Теорема про ланцюговий базис. Теорема про існування та однозначність ЖНФ.