

## 1. ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ ТА ЛІНІЙНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

1.1. Підпростори векторних просторів. Означення векторного простору. Найпростіші властивості векторних просторів. Поняття лінійного відображення. Простір лінійних відображень. Композиція лінійних відображень та її властивості. Мономорфізми, епіморфізми та ізоморфізми векторних просторів. Поняття базису векторного простору. Формулювання леми Цорна. Доведення існування базису. Теорема про поняття розмірності скінченно вимірного простору. Скінченні базиси та ізоморфізми з координатним простором. Сума і перетин підпросторів.

1.2. Матриця лінійного відображення. Лінійні відображення, приклади. Бієкція між лінійними відображеннями та їх обмеженнями на базис. Матриця лінійного відображення. Заміна базису. Матриця переходу, матриця заміни координат та їх зв'язок. Перетворення координат вектора і матриці лінійного відображення при заміні базису. Спряження матриць. Матриця добутку лінійних операторів. Поняття категорії та функтора. Ядро і образ лінійного відображення. Теорема про розмірність ядра та образу. Теорема про монотонність розмірності. Принцип Діріхле для скінченно вимірних векторних просторів. Теорема про розмірності простору та підпростору.

1.3. Застосування понять базису та лінійного відображення. Розклад многочлена в точці. Формула Тейлора. Задача інтерполяції. Формула Лагранжа. Формула Ньютона. Кільце многочленів від багатьох змінних. Однорідні многочлени. Поняття симетричного многочлена. Поняття гомогенного та елементарного симетричного многочлена.

1.4. Поняття факторпростору. Еквівалентність, визначена підпростором. Операції на класах еквівалентності, коректність їх визначення. Поняття фактор простору, перевірка для нього аксіом векторного простору. Розмірність фактор простору. Універсальна властивість факторпростору. Теорема про ізоморфність факторпростору за ядром та образу. Наслідок про послідовну факторизацію.

1.5. Поняття прямої суми. Поняття прямої суми. Відображення, пов'язані з прямою сумою та співвідношення між ними. Лінійні відображення в пряму суму. Лінійні відображення з прямої суми. Лінійні відображення між прямими сумами. Формула Грасмана. Внутрішня пряма сума, еквівалентність різних означень. Поняття повної системи ортогональних ідемпотентів.

1.6. Нормальна Жорданова форма. Поняття інваріантного підпростору. індуковані відображення підпростору та фактор-простору. Власний вектор, власне значення. Характеристичний поліном матриці та лінійного відображення. Незалежність власних векторів та наслідок з неї. Поліноми від лінійного оператора та поліноми від матриці, їх властивості. Твердження про поліноми від матриць та інваріантні підпростори. Поняття нільпотентного оператора. Лема про степінь нільпотентності. Поняття кореневого простору. Дія лінійних поліномів від нільпотентного оператора. Зв'язок між кореневими та власними векторами. Анулюючий та мінімальний поліноми оператора, зв'язок між ними. Теорема про кореневий розклад. Поняття клітини Жордана. Нормальна форма Жордана (ЖНФ). Теорема про ланцюговий базис. Теорема про існування та однозначність ЖНФ. Функції від матриці. Алгоритм обчислення функції від матриці.

1.7. Поняття дуального простору. Дуальний базис. Канонічне білінійне спарювання між простором та дуальним, його властивості. Вкладення простору в другий дуальний. Спряжене відображення, його властивості.

1.8. Білінійні форми. Простір білінійних форм. Матриця білінійної форми. Поведінка матриці білінійної форми при заміні базису. Симетричні та косиметричні форми та їх матриці. Квадратична форма та відповідна їй симетрична білінійна форма. Теорема про існування ортогонального базису для симетричної форми. Ортогоналізація Грама-Шмідта. Симетричні форми над  $\mathbb{C}$  та  $\mathbb{R}$ . Теорема про інерцію. Поняття визначеної форми. Евклідів простір. Нерівність Буняковського-Коші-Шварц. Нерівність трикутника. Ортогональні оператори та їх властивості. Ортогональні матриці. Теорема про зведення двох форм до діагонального вигляду. Поняття ермітової форми та унітарного простору. Існування ортонормованого базису в унітарному просторі. Унітарні та самоспряжені оператори в ермітовому просторі, їх матриці. Нормальний оператор, теорема про нормальний оператор.