

Задача 1 Знайдіть ортогональне перетворення, яке зводить наступну квадратичну форму до канонічного вигляду (зведення до головних осей), і записати цей канонічний вигляд (перетворення визначене неоднозначно):

$$f = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Розв'язок.

Спершу зауважимо, що канонічний вигляд $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$, до якого квадратична форма f зводиться ортогональним перетворенням, визначається однозначно, причому його коефіцієнти $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ є коренями характеристичного рівняння $|A - \lambda I| = 0$ матриці A форми f . Такий канонічний вигляд квадратична форма f має в ортонормованому власному базисі.

Запишемо матрицю A квадратичної форми f :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$A = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ 2 & -5 - \lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -y^3 - 3y^2 + 18y = (3 - y)y(y + 6) = 0.$$

Коренями цього рівняння є $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -6, \lambda_3 = 0$.

Отже, шуканим канонічним виглядом є, наприклад, $f = 3y_1^2 - 6y_2^2$.

Знайдемо ортогональне перетворення, яке зводить форму f до канонічного вигляду. Для цього знаходимо власні вектори, що відповідають власним числам $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -6, \lambda_3 = 0$, а потім нормуємо ці власні вектори. Зауважимо, що для симетричної матриці власні вектори, що відповідають різним власним числам, ортогональні (Переконайтеся!).

Власному числу $\lambda_1 = 3$ відповідає власний вектор $v_1 = (2, 1, 2)$. Нормуємо його: $v'_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Власному числу $\lambda_2 = -6$ відповідає власний вектор $v_2 = (1, -4, 1)$. Нормуємо його: $v'_2 = (\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}})$.

Власному числу $\lambda_3 = 0$ відповідає власний вектор $v_3 = (-1, 0, 1)$. Нормуємо його: $v'_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Отже, матриця переходу від стандартного базису до власного ортонормованого має вигляд

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

“Старі” координати x та “нові” координати y пов'язані наступним чином:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки S — ортогональна матриця, то $S^{-1} = S^T$, тому “нові” координати виражаються через “старі” наступним чином:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $f = 3y_1^2 - 6y_2^2$;

$$x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3, \quad x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{4}{3\sqrt{2}}y_2, \quad x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3.$$

Задача 2 Знайдіть ортогональну проекцію y і ортогональну складову z вектора x на лінійний підпростір L :

$x = (4, -1, -3, 4)$. L натягнуто на вектори $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 2, -1)$, $a_3 = (1, 0, 0, 3)$.

Розв'язок.

Оскільки $\mathbb{R}^4 = L \oplus L^\perp$, де L^\perp — ортогональне доповнення до підпростору L , то вектор $x \in \mathbb{R}^4$ єдиним чином можна зобразити у вигляді $x = y + z$, де $y \in L$, $z \in L^\perp$.

Базисом підпростору L є вектори a_1, a_2 ($a_3 = 2a_1 - a_2$). Шукаємо y у вигляді $y = c_1 a_1 + c_2 a_2$. Помноживши цю рівність скалярно на a_i ($i = 1, 2$), отримаємо

$$\begin{cases} (a_1, y) = c_1(a_1, a_1) + c_2(a_1, a_2) \\ (a_2, y) = c_1(a_2, a_1) + c_2(a_2, a_2) \end{cases}$$

Оскільки $z \in L^\perp$, а $a_1, a_2 \in L$, то для $i = 1, 2$: $(a_i, y) = (a_i, x) + (a_i, z) = (a_i, x)$ (бо $(a_i, z) = 0$)

Обчисливши всі скалярні добутки (а саме: $(a_1, x), (a_2, x), (a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_2)$), маємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 4 = 4c_1 + 4c_2 \\ -8 = 4c_1 + 10c_2 \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо $c_1 = 3, c_2 = -2$. Тоді ортогональна проекція $y = 3a_1 - 2a_2 = (1, -1, -1, 5)$, ортогональну складову z знаходимо як $z = x - y$, отримаємо $z = (3, 0, -2, -1)$.

Відповідь: Ортогональна проекція $y = (1, -1, -1, 5)$, ортогональна складова $z = (3, 0, -2, -1)$.