

# ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ

## 1. Практикум

### 1.3. Підпростори, фактор простори.

#### Деякі твердження та означення

Нехай  $V$  - це  $n$ -вимірний векторний простір над полем  $\mathbb{k}$ . Якщо  $W \subset V$  - деякий лінійний підпростір, то існує мономорфізм  $\sigma : W \rightarrow V$ . Фіксуємо базиси  $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$  простору  $V$  та  $\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$ ,  $m \leq n$  підпростору  $W$ . Відображення  $\sigma : W \rightarrow V$  визначається  $(n \times m)$ -матрицею  $[\sigma]$ , яка називається **матрицею занурення** підпростору  $W$  в  $V$  (при фіксованих базисах  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ ). Стівпчиками матриці  $[\sigma]$  будуть координати векторів  $w_1, \dots, w_m$  в базисі  $\mathbf{v}$ .

*Зауваження.* Матрицю занурення можна так само визначити і в разі завдання підпростору системою твірних векторів  $\{b_1, \dots, b_m\}$  (не обов'язково лінійно незалежною); при цьому відображення  $[\sigma]$  може не бути мономорфізмом. Матрицю занурення в цьому випадку називаємо **розширеною матрицею занурення**.

Нехай  $V$  - деякий простір над полем  $\mathbb{k}$ ,  $V_1, V_2 \subset V$  - його підпростори. Має місце формула Грасмана:

$$(1) \quad \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Векторний простір  $V$  називається **внутрішнім прямим добутком** (або внутрішньою прямою сумою) своїх підпросторів  $V_1, V_2$  і позначається  $V = V_1 \uplus V_2$ , якщо

$$V = V_1 + V_2, \quad V_1 \cap V_2 = 0.$$

Якщо  $V = V_1 + V_2$ , то для довільного вектора  $v \in V$  існує розклад за підпросторами  $v = v_1 + v_2$ ,  $v_1 \in V_1$ ,  $v_2 \in V_2$ . Такий розклад єдиний тоді і лише тоді, коли  $V = V_1 \uplus V_2$ .

Нехай  $V = V_1 \uplus V_2$  - розклад простору  $V$  в пряму суму підпросторів. Лінійне відображення

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} P_1 : & V & \longrightarrow V \\ & v = v_1 + v_2 & \longmapsto v_1 \end{array}$$

називається **оператором проєкції** з простору  $V_1 \uplus V_2$  на простір  $V_1$  паралельно до простору  $V_2$ . Вектор  $v_1$  називається **проєкцією** елемента  $v$  на підпростір  $V_1$  паралельно до підпростору  $V_2$ , а  $v_2$  називається **проєкцією** елемента  $v$  на простір  $V_2$  паралельно до простору  $V_1$ . При цьому  $\text{Im } P_1 = V_1$ ,  $\text{Ker } P_1 = V_2$  і виконуються тотожності:

$$(3) \quad P_1 + P_2 = 1_V, \quad P_1^2 = P_1, \quad P_2^2 = P_2, \quad P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0.$$

Нехай  $W \subset V$  - деякий підпростір простору  $V$ . Відношення на  $V$  вигляду  $x \sim y \iff x - y \in W$  є відношенням еквівалентності. **Суміжним класом** елемента  $v \in V$  за підпростором  $W$  називається клас еквівалентності  $\bar{v} = v + W$ . Два суміжні класи або не перетинаються, або збігаються. **Фактор простором** простору  $V$  за підпростором  $W \subset V$  називається множина суміжних класів

$$V/W = \{ \bar{v} = v + W \mid v \in V \},$$

яка має природну структуру векторного простору над полем  $\mathbb{k}$ . При цьому

$$(4) \quad \dim V/W = \dim V - \dim W.$$

Позначимо через

$$(5) \quad \begin{aligned} \pi_W : V &\longrightarrow V/W \\ v &\longmapsto v + W \end{aligned}$$

канонічну проекцію з простору  $V$  на фактор простір  $V/W$ , лінійне відображення  $\pi_W$  – епіморфізм,  $\text{Im } \pi_W = V/W$ ,  $\text{Ker } \pi_W = W$ .

*Зауваження.* Якщо  $V = W \oplus W'$  і  $w'_1, \dots, w'_k$  – базис  $W'$ , то  $\overline{w'_1}, \dots, \overline{w'_k}$  – базис  $V/W$ .

Нехай  $V, U, W$  – деякі простори над полем  $\mathbb{k}$ . Тоді

$$\begin{aligned} \exists \text{ мономорфізм } \sigma : U &\longrightarrow V && \iff && U \text{ підпростір } V \\ \exists \text{ епіморфізм } \pi : V &\longrightarrow W && \iff && W \text{ фактор простір } V \end{aligned}$$

1.3.1. Підпростір  $V \subset \mathbb{R}^4$  задається системою твірних  $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ . Нехай  $W \subset \mathbb{R}^4$  – це підпростір розв'язків системи лінійних рівнянь  $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$ .

- (1) Знайдіть визначальну систему лінійних рівнянь для підпростору  $V$ .
- (2) Покажіть, що сума підпросторів  $V + W$  є прямою.
- (3) Знайдіть розклад вектора  $x = (1, 2, 4, 2)^\top$  за підпросторами  $V$  та  $W$ .

1.3.2. Підпростір  $U_1 \subset \mathbb{R}^4$  заданий визначальною матрицею  $A$  (тобто  $U_1 = \text{Ker } L_A$ ), а підпростір  $U_2 \subset \mathbb{R}^4$  заданий системою твірних  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}^4$ , де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть базис підпростору  $U_1 \cap U_2 \subset \mathbb{R}^4$ . Знайдіть визначальну систему лінійних однорідних рівнянь, що задає підпростір  $U = U_1 + U_2 \subset \mathbb{R}^4$ , та базис простору  $U$ .

1.3.3. Для матриці  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_4(\mathbb{R})$  опишіть множину  $\{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \notin \text{Im } L_A\}$ .

1.3.4. Вкажіть, як відрізняються між собою різні доповнювальні підпростори до підпростору  $V$  в  $\mathbb{R}^3$ , де  $V = \left( \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$ . (Які підпростори вважаються рівними?)

1.3.5. Нехай  $V$  - це лінійна оболонка векторів

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть розмірність  $\dim V$  та базис підпростору  $V \subset \mathbb{R}^4$ . Вкажіть доповнення підпростору  $V$  до простору  $\mathbb{R}^4$  (тобто розклад у суму  $\mathbb{R}^4 = V + V'$ , так, щоб  $V \cap V' = 0$ ).

1.3.6. Покажіть, що  $V + W = V$  та  $V \cap W = W$ , де  $W = (w_1, w_2)$ ,  $V = (v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^4$ . Доповніть базис простору  $W$  до базису простору  $V$ , якщо

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.3.7. Знайдіть базис суми  $V + W$  двох підпросторів  $V, W \subset \mathbb{R}^4$ , заданих системами твірних

$$V = \left( \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right); \quad W = \left( \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right).$$

Використовуючи формулу Грасмана  $\dim V + \dim W - \dim(V \cap W) = \dim(V + W)$ , перевірте, чи буде ця сума прямою.

1.3.8. Знайдіть базиси перетину  $V \cap W$  та суми  $V + W$  двох підпросторів  $V, W \subset \mathbb{R}^4$ , заданих системами лінійних рівнянь:

$$V : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \quad W : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Перевірте справедливість формули Грасмана.

1.3.9. Перейшовши до задання підпросторів системами лінійних однорідних рівнянь, знайдіть базис перетину  $V \cap W$  двох підпросторів  $V, W \subset \mathbb{R}^4$ , заданих системами твірних

$$V = \left( \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right); \quad W = \left( \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right)$$

Вкажіть базиси просторів  $V$  та  $W$ , які включають в себе базис перетину  $V \cap W$ .

- 1.3.10. 1). Знайдіть базиси суми  $V + W$  та перетину  $V \cap W$  підпросторів  $V, W \subset \mathbb{R}^3$ .  
 2) Для вектора  $b \in \mathbb{R}^3$  знайдіть два різних розклади за цими підпросторами.

$$V = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right); \quad W = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right); \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.3.11. Нехай  $V_1, V_2 \subset V$  - лінійні підпростори і  $\dim(V_1 + V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) = 1$ . Покажіть, то сума  $V_1 + V_2$  співпадає з одним із цих підпросторів, а перетин  $V_1 \cap V_2$  - з іншим.

1.3.12. Не використовуючи формули Грасмана, доведіть твердження: якщо  $\dim(V + W) = \dim V$ , то  $\dim(V \cap W) = \dim W$ .

1.3.13. Покажіть, що сума підпросторів  $V_1, V_2 \subset V$  є прямою тоді і лише тоді, коли довільний вектор  $v \in V$  однозначно представляється у вигляді суми  $v = v_1 + v_2$ , де  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ .

1.3.14. Покажіть, що сума підпросторів  $V_1, V_2 \subset V$  є прямою тоді і лише тоді, коли хоча б один вектор  $v \in V$  однозначно представляється у вигляді суми  $v = v_1 + v_2$ , де  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ .

1.3.15. Нехай  $V = V_1 \dot{+} V_2$ . Покажіть, що оператор проєкції  $P_1 : V_1 \dot{+} V_2 \rightarrow V_1$  є ідемпотентним, тобто  $P_1^2 = P_1$ . Покажіть, що  $P_2 = 1_V - P_1$  - оператор проєкції на підпростір  $V_2$  паралельно до  $V_1$ .

1.3.16.

1.3.17. Доведіть, що в лінійному просторі  $\text{Mat}_n(\mathbb{k})$  лінійні підпростори  $V_1$  симетричних і  $V_2$  косиметричних матриць можна розглядати як прямі доповнення один до одного. Знайдіть відображення проєкцій  $P_1, P_2$  від елементарних матриць (на кожен з цих підпросторів паралельно до доповнюючого підпростору). Як знайти ці проєкції для довільної матриці?

1.3.18. В лінійному просторі  $\text{Mat}_n(\mathbb{k})$  вкажіть розмірність та базис перетину лінійних підпросторів верхніх трикутних та нижніх трикутних матриць.

1.3.19. Покажіть, що сума 4-вимірного та 5-вимірного підпросторів простору розмірності 8 не може бути прямою.

1.3.20. Покажіть, що для довільного розкладу в пряму суму  $V = V_1 \dot{+} V_2$  існує лінійний оператор  $f : V \rightarrow V$  такий, що  $\text{Im } f = V_1, \text{ Ker } f = V_2$ .

1.3.21. Покажіть, що для довільного підпростору  $W \subset V$  існує лінійний оператор  $f : V \rightarrow V$  такий, що (a)  $\text{Im } f = W, \text{ (b) Ker } f = W$ .

1.3.22. Нехай  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ .

- (1) Доповніть базис підпростору  $V = \langle v_1, v_2 \rangle$  до базису  $\mathbb{R}^4$ , тобто визначте розклад  $\mathbb{R}^4 = V \dot{+} V'$ .

- (2) Вкажіть розмірність та базис фактор-простору  $\mathbb{R}^4/V$ .
- (3) Визначте значення канонічної проєкції  $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4/V$  на стандартних базисних векторах.
- (4) Випишіть матрицю  $[\pi]$  в цих базисах.
- (5) Обчисліть  $\pi(2e_1 + e_2 + 2e_3 + 2e_4)$ .

1.3.23. Нехай  $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$  - деякі підпростори і  $\dim V_i = d_i, i = 1, 2, \dim(V_1 \cap V_2) = d$ . Чому дорівнює  $\dim(V_1 \cup V_2)/(V_1 \cap V_2)$ ?

1.3.24. Нехай  $W = \left( \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^4$ . Знайдіть розмірність та базис фактор-

простору  $\mathbb{R}^4/W$  та координати вектора  $\overline{e_1 + e_2} = e_1 + e_2 + W \in \mathbb{R}^4/W$  в цьому базисі. Покажіть, що  $\overline{e_1 + e_2 + 2e_3 + 2e_4} = \overline{e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4}$ .

1.3.25. Нехай  $W = \left( \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right); V = \left( \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

- (1) Покажіть, що  $W \subset V$ .
- (2) Доповніть базис підпростору  $W$  до базису  $V$ , тобто визначте розклад  $V = W \oplus W'$ .
- (3) Знайдіть розмірність та базис фактор-простору  $V/W$ .

1.3.26. Нехай  $V = \mathbb{R}^4, W = \left( \left( \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right); U = \left( \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ .

а) Знайдіть базис фактор-простору  $V/W$  та визначте проєкцію  $\pi : V \rightarrow V/W$  у стандартному базисі.

б) Знайдіть базис підпростору  $\pi(U)$ .

с)\* Встановіть ізоморфізм підпросторів :  $(U + W)/W \simeq U/U \cap W$ .

1.3.27. Вкажіть геометричний смисл поняття підпростору  $V = (v_1, v_2)$  декартового простору  $\mathbb{R}^3$  та фактор простору  $\mathbb{R}^3/V$ , якщо  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

1.3.28. Нехай  $D = \frac{\partial}{\partial x}$  - оператор диференціювання в просторі  $\mathbb{R}[x]_n$ . Опишіть фактор простір  $\mathbb{R}[x]_n/\text{Ker}D$ .

1.3.29. Нехай  $F : \mathbb{R}[x]_n \rightarrow \mathbb{R}[x]_n, f(x) \mapsto f(0)$  - лінійне відображення в просторі  $\mathbb{R}[x]_n$ . Опишіть фактор простір  $\mathbb{R}[x]_n/\text{Ker}F$ .

1.3.30. Нехай  $V = \text{Mat}_n(\mathbb{k})$  - простір матриць. Вкажіть розмірність та базис фактор простору  $V/W$ , якщо  $W$  є підпростором а) діагональних матриць; б) скалярних матриць; с) матриць зі слідом 0.

1.3.31. \* Лінійний оператор  $f : V \rightarrow V$  називається інволюцією, якщо його квадрат дорівнює тотожному відображенню  $I = I_V : V \rightarrow V$ . Нехай  $f : V \rightarrow V$  - інволюція. Покажіть, що

- (1)  $V = \text{Im}(I - f) \oplus \text{Im}(I + f)$ ;
- (2)  $\text{Im}(I - f) = \text{Ker}(I + f)$ ;
- (3)  $V = \text{Ker}(I - f) \oplus \text{Ker}(I + f)$ .

1.3.32. \* Лінійний оператор  $f : V \rightarrow V$  називається ідемпотентним, якщо  $f^2 = f$ . Нехай  $f : V \rightarrow V$  - ідемпотент. Покажіть, що  $V = W \oplus \text{Ker}(f)$ , де  $W = \{x \in V \mid f(x) = x\}$ .

**Додому:**

1.3.33. Знайдіть базиси векторних просторів  $V$ ,  $W$ ,  $V + W$  та  $V \cap W$ , якщо підпростори  $V, W \subset \mathbb{R}^3$  задані системами твірних

$$V = \left( \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right); \quad W = \left( \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Вкажіть базиси просторів  $V$  та  $W$ , які включають в себе базис перетину  $V \cap W$ .

1.3.34. Покажіть, що сума двох різних 2-вимірних підпросторів в  $\mathbb{R}^3$  дорівнює усьому  $\mathbb{R}^3$ .

1.3.35. Підпростори  $V, W \subset \mathbb{R}^4$  задані системами твірних

$$V = \left\{ \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right); \quad W = \left\{ \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Покажіть, що  $V + W = W$  та  $V \cap W = V$ .

1.3.36. Знайдіть базис суми і базис перетину підпросторів  $U_1 = (a_1, a_2, a_3)$  і  $U_2 = (b_1, b_2, b_3)$  простору  $\mathbb{R}^4$  та представте вектор  $c = (3, 1, 0, 1)^\top$  двома способами у вигляді суми  $c = u_1 + u_2$ ,  $u_1 \in U_1$ ,  $u_2 \in U_2$ , якщо

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1.3.37. Перевірте, чи справедливе включення  $W \subset V$ , де  $W = (w_1, w_2)$ ,  $V = (v_1, v_2, v_3)$ , якщо

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1.3.38. Знайдіть базис фактор-простору  $\mathbb{R}^3/V$ ,  $V = \left( \left( \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)$  та визначте канонічну проєкцію  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/V$  у стандартному базисі. Знайдіть  $\pi \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\pi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

1.4. Відповіді. 1.3.1. 1.  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$  2.  $V \cap W = 0$ . 3.  $x = (-2, 1, 3, 1)^\top + (1, 1, 1, 1)^\top \in V + W$ .

1.3.2. Базис  $U_1$  складається з векторів  $(1, -1, -1, 0)^\top$ ,  $(1, 0, 0, 1)^\top$ , базис  $U_1 \cap U_2$  є  $(-1, 2, 2, 1)^\top$ , визначальна систему для  $U : \{x_2 = x_3\}$ .

1.3.6. Базис  $V$  дорівнює  $\{w_1, w_2, w_3\}$ .

1.3.7. Базис  $V + W$  дорівнює  $\{v_1, v_2, w_2\}$ ,  $\dim(V \cap W) = 1$ .

1.3.8.  $\dim(V + W) = 3$ ;  $V \cap W = \left( (1, -1, -1, 1)^\top \right)$ .

1.3.9.  $V \cap W = \left( (0, 1, 2, 1)^\top \right)$ ,  $(0, 1, 2, 1)^\top = 2v_1 + v_2 = w_1 + w_2$ .

1.3.22.  $\mathbb{R}^4 = V + U$ ,  $U = (e_3, e_4)$ ,  $\mathbb{R}^4/V = (\bar{e}_3, \bar{e}_4)$ ,  $[\pi] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{e}_3 + \bar{e}_4$ .

1.3.23.  $d_1 + d_2 - 2d$ .