2. Жорданова нормальна форма

2.1. Власні та інваріантні підпростори.

Деякі твердження та означення

Нехай V – векторний простір над полем $\Bbbk$, $f : V \longrightarrow V$ – лінійний оператор. Підпростір $W \subset V$ називається **інваріантним** для оператора f, якщо $f(w) \in W$ для довільного $w \in W$. Цю умову ще можна записати так: $f(W) \subset W$.

Індукований лінійний оператор

Нехай $W \subset V$ – інваріантний підпростір відносно оператора $f : V \to V$, $\dim V = n$, $\dim W = m$. Існує оператор $f_W : W \to W$ (який називається **індукованим**) такий, що наступна діаграма комутативна:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f_W} & W \\ {\scriptstyle\sigma_W}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\sigma_W} \\ V & \xrightarrow{f} & V \end{array}, \qquad \text{де} \quad \sigma_W - \text{ канонічне занурення.}$$

Позначимо через $\mathbf{v} = \{w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ базис простору V такий, що $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ – це базис простору W. Тоді $\mathbf{u} = \{\overline{v}_{m+1}, \ldots, \overline{v}_n\}$ – базис фактор-простору V/W. Оператор f індукує лінійний оператор $\overline{f}_W : V/W \to V/W$, $\overline{v} \mapsto \overline{f(v)}$ такий, що наступна діаграма комутативна:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ {\scriptstyle\pi_W}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi_W} \\ V/W & \xrightarrow{\overline{f}_W} & V/W \end{array}, \qquad \text{де} \quad \pi_W - \text{ канонічна проекція.}$$

Матриця $[f] = {}_{\mathbf{v}}[f]_{\mathbf{v}}$ має вигляд: $[f] = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, де $A \in \mathrm{Mat}_m(\Bbbk)$, $B \in \mathrm{Mat}_{m\times(n-m)}(\Bbbk)$, $C \in \mathrm{Mat}_{n-m}(\Bbbk)$. Згідно з вищесказаним, A - це матриця оператора $f_W : W \to W$ в базисі $\mathbf{w}$, а C- це матриця оператора $\overline{f}_W : V/W \to V/W$ в базисі $\mathbf{u}$.

Власні підпростори лінійного оператора

Скаляр $\lambda \in \Bbbk$ називається **власним значенням** лінійного оператора $f : V \longrightarrow V$, якщо існує $w \in W$ таке, що $f(w) = \lambda w$. Вектор $w \in V$ називається **власним** для лінійного оператора $f : V \longrightarrow V$ з **власним значенням** $\lambda \in \Bbbk$, якщо $f(w) = \lambda w$. Підпростір простору V, який містить усі власні вектори відносно власного значення $\lambda \in \Bbbk$, називається **власним підпростором** і позначається V_λ. Тоді $V_\lambda = \mathrm{Ker}\,(\lambda - f)$ [1]. Очевидно, V_λ – інваріантний підпростір оператора f і матриця індукованого оператора $f : V_\lambda \to V_\lambda$ в довільному базисі є скалярною матрицею $[\,f\,] = \lambda \mathrm{I}_m$, $m = \dim V_\lambda$.

Характеристичним поліномом матриці $A \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ називається поліном $\chi_A(\lambda) = |\, \lambda \mathrm{I}_n - A\,|$. **Характеристичним поліномом** лінійного оператора $f : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ називається поліном

$$\chi(\lambda) = \chi_f(\lambda) = |\, \lambda \mathrm{I}_n - A\,|, \quad \text{де} \quad A = [\,f\,].$$

Характеристичний поліном $\chi_f(\lambda)$ оператора f не залежить від вибору базису, в якому розглядається його матриця. Множина Λ_f усіх коренів полінома $\chi_f(\lambda)$ називається **спектром оператора** f. Для $\lambda \in \Lambda_f$ позначимо через k_λ кратність λ як кореня полінома χ_f.

---

[1] Через $\lambda - f$ позначається відображення $\lambda 1_V - f : V \to V$.

Якщо $f : V \to V$ і $W \subset V$ - інваріантний підпростір, то характеристичний поліном індукованого оператора $f_W : W \to W$ ділить $\chi_f(\lambda)$.

Кажуть, що ненульовий поліном $\varphi(t) \in \Bbbk[t]$ анулює оператор $f : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$, якщо оператор $\varphi(f)$ тотожно рівний нулю. Анулюючий поліном оператора f найменшого степеня зі старшим коефіцієнтом 1 називається **мінімальним** поліномом оператора f і позначається $\mathtt{m}_f$. Мінімальний поліном оператора $\mathrm{L}_A : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ називається мінімальним поліномом матриці A.

Теорема 2.1 (Гамільтона-Келі). *Якщо $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$, то для довільного оператора $f : V \to V$ справедлива тотожність:*

$$\chi_f(f) = 0 \qquad (\textit{тотожно рівний нулю.})$$

Іншими словами, кожен оператор є коренем свого характеристичного полінома. Тоді, за теоремою про ділення з остачею, довільний анулюючий поліном ділиться на мінімальний. Зокрема, $\deg \mathtt{m}_f \mid n$.

Кажуть, що $f : V \longrightarrow V$ **діагоналізується** (або зводиться до діагонального вигляду), якщо в деякому базисі $\mathbf{v}$ простору V матриця ${}_{\mathbf{v}}[f]_{\mathbf{v}}$ діагональна. Іншими словами, оператор f діагоналізується, якщо існує базис V, який складається з власних векторів f.

Лема 2.2. *Оператор $f : V \longrightarrow V$ діагоналізується, якщо усі його власні значення належать полю $\Bbbk$ і виконується одна з двох еквівалентних умов:*

$$(1) \quad n = \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim V_\lambda, \qquad (2) \quad \dim V_\lambda = k_\lambda \ \textit{ для кожного } \ (\lambda, k_\lambda) \in \Lambda.$$

Для лінійного оператора $f : V \longrightarrow V$ підпростір

$$C_f(v) = \left\{ f^k(v) \mid k = 0, 1, \dots \right\} \subset V$$

називається **циклічним** (відносно f), породжених вектором $v \in V$. $C_f(v)$ є найменшим інваріантним підпростором оператора f, який містить v. При цьому виконується така властивість:
Якщо $W \subset V$ - інваріантний підпростір (відносно f) і $v \in W$, то $C_f(v) \subset W$.

(1) Обчисліть власні значення та власні вектори оператора f з матрицею

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \ b) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \ c) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad d) \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad e) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть матрицю B цього оператора в базисі, що складається із власних векторів.

(2) Знайдіть власні значення та власні підпростори оператора з матрицею

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{a) в } \mathbb{R}; \quad \text{b) в } \ \mathbb{C}.$$

(3) Знайдіть власні значення та власні вектори оператора $f(x) \mapsto f(2x+1)$ в $\mathbb{R}[x]_3$.

(4) Доведіть, що сума власних підпросторів оператора A (з різними власними значеннями) є прямою сумою.

(5) Обчисліть власні значення та власні підпростори оператора $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ з матрицею

$$(a)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для яких матриць підпростір $W = \big(e_3, e_4\big)$ буде інваріантним?

(6) Знайдіть діагональний вигляд $\operatorname{diag}(f)$ оператора $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ з матрицею A та матрицю переходу до базису, що складається з власних векторів:

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(7) Знайдіть діагональний вигляд $\operatorname{diag}(f)$ оператора $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ вигляду

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} z \\ x - z \\ y + z \end{pmatrix}.$$

та матрицю переходу до базису, що складається з власних векторів.

(8) Знайдіть матрицю переходу до базису, що складається з власних векторів оператора f з матрицею $[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ та матрицю оператора f в цьому базисі.

(9) Чи діагоналізуються такі матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}?$$

(10) Нехай $L = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Покажіть, що підпростір $V = (v_1, v_2) \subset \mathbb{R}^3$ є інваріантним для лінійного відображення $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, визначеного матрицею L, але не містить власних векторів.

(11) Що можна сказати про оператор $f : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$, відносно якого довільний підпростір $V \subset \Bbbk^n$ є інваріантним?

(12) Знайдіть усі інваріантні підпростори оператора диференціювання в просторі $\mathbb{R}[x]_n$.

(13) Доведіть, що якщо f – невироджений оператор, то f та f^{-1} мають одні і ті ж інваріантні підпростори. Порівняйте спектри Λ_f та $\Lambda_{f^{-1}}$.

(14) Матриця лінійного оператора f має вигляд $[\,f\,] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайдіть базиси циклічних підпросторів $C_f(e_1)$, $C_f(e_4)$, $C_f(e_1+e_2)$ та матриці індукованих операторів у цих базисах.

(15) Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Припустимо, що $\mathbb{R}^n = C_f(x)$ для деякого $x \in \mathbb{R}^n$. Це означає, що множина $\mathbf{v} = \{f^{n-1}(x), \dots, f(x), x\}$ утворює базис $\mathbb{R}^n$. Якщо

$$f^n(x) = a_1 f^{n-1}(x) + \ldots + a_{n-1} f(x) + a_n x, \quad \text{то} \quad F = {}_{\mathbf{v}}[f]_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

F називається матрицею Фробеніуса. Обчисліть характеристичний поліном $\chi_f(\lambda)$. Покажіть, що якщо $\chi_f(\lambda)$ незвідний над $\mathbb{R}$, то оператор f не має нетривіальних інваріантних підпросторів.

Відповіді:

2.1.1. (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad V_5 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $V_{-2} = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$.

$T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\quad T^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$;

(d) $\operatorname{diag}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $V_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $V_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $V_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

(e) $\operatorname{diag}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $V_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $V_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

2.1.2. Для $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $v_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_i = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_{-i} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Інваріантні підпростори над $\mathbb{R}$: $V_{-1} = (v_{-1})$ та $U = (e_1, e_2 + e_3)$.

2.1.3. $\Lambda_f = \{1, 2, 4, 8\}$; $V_1 = (1)$, $V_2 = (x+1)$; $V_4 = ((x+1)^2)$, $V_8 = ((x+1)^3)$.

2.1.5. (a) $V_2 = (e_2)$, $V_3 = (e_4)$; (b) $V_2 = (e_2)$, $V_3 = (e_1)$; (c) $V_2 = (e_3)$, $V_3 = (e_2, e_4)$.

2.1.6. (a) $\operatorname{diag}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; $\quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) $\operatorname{diag}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.1.7. $\operatorname{diag}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$; $\quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-i & -1+i \\ 1 & i & -i \end{pmatrix}$.

2.1.8. $\operatorname{diag}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2.1.9. A діагоналізується, B – ні, C – ні.

2.1.9. $Lv_1 = v_1 - v_2$, $Lv_2 = v_1 + v_2$. Якщо $L(\alpha v_1 + \beta v_2) = \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2)$, то $\alpha^2 + \beta^2 = 0$.

2.1.12. Інваріантні підпростори мають вигляд $\mathbb{R}[x]_k$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

2.1.14. $C_f(e_1) = \Big(e_1, -e_1 - e_4, 2e_1 + e_2\Big)$, $[f]_{C_f(e_1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. $C_f(e_4) = \Big(e_4, e_4 - e_1 - e_2\Big)$, $[f]_{C_f(e_4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $C_f(e_1 + e_2) = \Big(e_1 + e_2\Big)$, $[f]_{C_f(e_1+e_2)} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$.

2.1.15. $\chi_f(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - \ldots - a_{n-1}\lambda - a_n$.

Додому:

(1) Костр.: 3.2.15, а), ст. 119; 2. 3.2.16, а), б); 3.2.22; 3.2.24.

(2) Обчисліть власні значення та власні підпростори оператора $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Кореневі підпростори.

Деякі твердження та означення

Кореневим підпростором простору $\Bbbk^n$ відносно оператора $f : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$, що відповідає власному значенню $\lambda \in \Lambda_f$ називається підпростір

$$V^\lambda \ = \ \bigl\{ v \in \Bbbk^n \mid \exists\, k \in \mathbb{N} \quad (\lambda - f)^k v = 0 \bigr\}.$$

Ланцюжком в кореневому підпросторі V^λ матриці A називається така система лінійно незалежних векторів v_1, v_2, …, v_k з V^λ, для якої

$$v_k \xrightarrow{(\lambda-f)} \underbrace{(\lambda - f)v_k}_{v_{k-1}} \xrightarrow{(\lambda-f)} \ldots\ldots \xrightarrow{(\lambda-f)} \underbrace{(\lambda - f)^{k-2}v_k}_{v_2} \xrightarrow{(\lambda-f)} \underbrace{(\lambda - f)^{k-1}v_k}_{v_1} \xrightarrow{(\lambda-f)} 0$$

Ланцюжковим базисом кореневого підпростору V^λ оператора f називається базис, який складається з ланцюжків. **Висотою** кореневого вектора $v \in V_\lambda$ називається таке $h \in \mathbb{N}$, що $(\lambda - f)^h v = 0$, але $(\lambda - f)^{h-1} v \neq 0$. Висота нульового вектора вважається рівною нулю; висота власного вектора дорівнює 1; висота довільного кореневого вектора не перевищує кратності відповідного власного значення (кореня характеристичного полінома).

Ланцюжковим базисом оператора f називається базис, який є об'єднанням ланцюжкових базисів усіх кореневих підпросторів.

Для $\lambda \in \Lambda_f$ позначимо $d_k(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda - f)^k$, $k > 0$.

Теорема 2.3. *Розмірність $\dim_\Bbbk V^\lambda$ збігається з кратністю λ. У кожному кореневому підпросторі V^λ існує ланцюжковий базис. Кількість ланцюжків в V^λ дорівнює розмірності $d_1(\lambda)$ власного підпростору V_λ з власним значенням λ. Довжина максимального ланцюжка дорівнює найменшому такому числу $t \in \mathbb{N}$, що $d_t(\lambda) = d_{t+1}(\lambda)$. Кількість ланцюжків довжини не менше ніж t у довільному ланцюжковому базисі простору V^λ дорівнює різниці $d_t(\lambda) - d_{t-1}(\lambda)$.*

Позначимо $J_k(\lambda) \in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ - клітину Жордана з власним значенням λ.

(1) Побудуйте кореневі підпростори та знайдіть висоти кореневих векторів для матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ - власні значення матриці A, $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ - кратності коренів λ_i характеристичного полінома $\chi_A(t)$, V^{λ_i} - кореневі підпростори.
- (a) Покажіть, що підпростір V^{λ_i} інваріантний.
- (b) Покажіть, що $V^{\lambda_i} \cap V^{\lambda_j} = 0$, якщо $i \neq j$, тобто сума $V^{\lambda_i} + V^{\lambda_j}$ – пряма.
- (c) Покажіть, що $\dim V^{\lambda_i} \leq k_i$.
- (d) Нехай $A' = A|_{V^{\lambda_i}} : V^{\lambda_i} \to V^{\lambda_i}$ - індукований оператор. Покажіть, що $\chi_{A'}(t) = (t - \lambda_i)^{k_i}$.
- (e) Припустимо, що $\Bbbk^n = V^{\lambda_1} \dotplus \cdots \dotplus V^{\lambda_r}$. Покажіть, що $\chi_A(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \ldots (t - \lambda_r)^{k_r}$.

(3) Розкладіть простір $\mathbb{R}^4$ в пряму суму кореневих підпросторів відносно оператора $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, знайдіть висоти кореневих векторів та побудуйте ланцюжкові базиси кореневих підпросторів, якщо

$$[\,f\,] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(4) Побудуйте ланцюжковий базис $\mathbf{v}$ простору $\mathbb{R}^3$ оператора f та знайдіть матрицю оператора в цьому базисі, якщо

$$(a) \quad [f] = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad (b) \quad [f] = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(5) Оператор $f : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ називається одноклітковим, якщо він має єдине власне значення λ і максимальна можлива висота кореневого вектора збігається з розмірністю простору n. У випадку одноклiткового оператора канонічний базис складається з одного ланцюжка, $\dim V_\lambda = 1$, $\dim V^\lambda = n$, і ЖНФ - це клітина Жордана $J_n(\lambda)$.

Нехай $v_n \to \ldots \to v_1 \to 0$ – деякий ланцюжок одноклiткового оператора $f : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$. Як описати усі ланцюжки цього оператора?

(6) Побудуйте ланцюжковий базис підпростору $\mathbb{R}^4$ та знайдіть матрицю A в цьому базисі, якщо:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 & 101 \\ 0 & 99 & 0 & 0 \\ 0 & 101 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 99 \end{pmatrix}.$$

(7) Задано лінійний оператор $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$:

$$f : \begin{cases} e_1 & \mapsto & 2e_1 - e_2 - e_4 \\ e_2 & \mapsto & 3e_2 - e_1 + e_4 \\ e_3 & \mapsto & e_2 + e_3 + e_4 \\ e_4 & \mapsto & e_1 - 2e_2 \end{cases}$$

Покажіть, що $\mathbb{R}^4 = V^1 \dotplus V^2$. Знайдіть оператор проекції $\mathtt{P} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ на підпростір V^1 паралельно до підпростору V^2.

(8) Побудуйте оператор $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, для якого $\Lambda_f = \{(1,1), (-1,2)\}$, $V_1 = (e_3)$, $V^{-1} = (e_1, e_2 - e_3)$ і $V_{-1} = (e_2 - e_3)$.

Відповіді:

2.2.1. $J(A) = J_1(1) \oplus J_1(1) \oplus J_2(2)$, $V^2 = V_2 = \big(e_1, e_3\big)$; $V_3 = \big(e_2 - e_1\big)$, $V^3 = \big(e_1 + e_4, e_2 - e_1\big)$.

$J(B) = J_1(-1) \oplus J_2(2) \oplus J_1(2)$, $\quad V^2 = \big(e_2, e_3, e_4\big)$.

$J(C) = J_1(1) \oplus J_3(2)$, $\quad V^2 = \big(e_2, e_3 - e_1, e_4\big)$.

2.2.3. $V_1 = \big(e_1 - 2e_2 + 2e_3\big)$, $V_3 = \big(e_1,\ e_2 + e_3,\ e_4 - e_2\big)$, $h(e_1) = 1$, $h(e_2 + e_3) = 2$, $h(e_4 - e_2) = 3$, $e_4 - e_2 \xrightarrow{f-3} e_2 + e_3 - e_1 \xrightarrow{f-3} e_1 \xrightarrow{f-3} 0$.

2.2.4. (a) $J(f) = J_1(2) \oplus J_3(0)$, $V_2 = V^2 = \big(e_2 - e_3\big)$, $V^0 = \big(e_2, e_1 + e_3\big)$, $\mathbf{v} = \{e_1 + e_2 + e_3, -e_1 - e_3\}$.

$$V^1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to 0$$

(b) $J(f) = J_3(2)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \to 0$, $\mathbf{v} = \{4e_1 + 4e_2, 2e_1, e_1 - 2e_3\}$.

2.2.6. ЖНФ: $J_a = J_2(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(3)$. $J_b = J_3(1) \oplus J_1(3)$. $J_c = J_2(99) \oplus J_2(99)$.

2.2.7. $V^1 = \big(e_3, e_2 + e_4\big)$, $V^2 = \big(e_2, -e_1 + e_2 + e_4\big)$, $\mathbf{v} = \big\{e_2 + e_4, e_3, -e_1 + e_2 + e_4, e_2\big\}$, $T = T_{\mathbf{ev}}$,

$$\mathcal{P} = T\, I_{2,4}\, T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2.8. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Додому:

Теоретичні: 3.2.19, ст. 120; 3.2.23; 3.2.24, 3.2.25;

Обчислювальні: 3.2.29, ст. 121; 3.2.33, а), г), ст. 121.

(1) Побудуйте канонічний базис та знайдіть матрицю в цьому базисі для $J_3(-1)$; $A = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

2.3. Жорданова нормальна форма. Мінімальний поліном.

Деякі твердження та означення

Теорема 2.4 (Жордана). *Для довільного оператора $f : V \to V$ заданого в базисі $\mathbf{v}$ простору V матрицею $A = [\,f\,] \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$, існує канонічний (ланцюжковий) базис. Якщо T - матриця переходу, то ЖНФ $J(A) = T^{-1}AT$ є прямою сумою клітин Жордана. Для кожного власного значення $\lambda \in \Lambda_f$ кількість клітин Жордана дорівнює кількості ланцюжків в кореневому просторі V^λ і дорівнює розмірності власного підпростору $\dim V_\lambda$, при цьому розмірність клітини дорівнює довжині відповідного їй ланцюжка.*

Дослідження оператора $f : V \to V$. Нехай в базисі $\mathbf{v}$ простору V маємо : $[\,f\,] = A \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$. Для знаходження ЖНФ оператора f слід виконати такі дії:

(1) Знайти характеристичний поліном та спектр $\Lambda = \Lambda_A$ матриці A.

(2) Для кожного власного значення $\lambda \in \Lambda$ визначити власний простір $V_\lambda = \mathrm{Ker}\,(\lambda\mathrm{I} - A)$.

(3) Визначити, чи не буде матриця A діагоналізовною.

Умова діагоналізації матриці A. Потрібно, щоб для кожного власного значення $\lambda \in \Lambda$ виконувалася умова: $\dim V_\lambda = k_\lambda$, *де k_λ - це кратність λ.*

(4) Для кожного власного значення $\lambda \in \Lambda$ побудувати кореневий простір V^λ матриці A. Для цього визначити послідовно такий ряд підпросторів:

$$V_\lambda = \mathrm{Ker}(\lambda\mathrm{I} - A) \subset \mathrm{Ker}(\lambda\mathrm{I} - A)^2 \subset \ldots \subset \mathrm{Ker}(\lambda\mathrm{I} - A)^{s_\lambda} = \mathrm{Ker}(\lambda\mathrm{I} - A)^{s_\lambda+1} = V^\lambda,$$

де s_λ - це таке найменше натуральне число, що виконується рівність $\mathrm{Ker}(\lambda\mathrm{I} - A)^{s_\lambda} = \mathrm{Ker}(\lambda\mathrm{I} - A)^{s_\lambda+1}$. Тоді $V^\lambda = \mathrm{Ker}(\lambda\mathrm{I} - A)^{s_\lambda}$ і $\dim V^\lambda = k_\lambda$, (де k_λ - це кратність λ).

(5) Розкласти простір $\Bbbk^n$ в пряму суму кореневих: $\Bbbk^n = \bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} V^\lambda$.

(6) Для кожного власного значення $\lambda \in \Lambda$ побудувати канонічний базис кореневого підпростору V^λ, в якому матриця індукованого оператора $f_\lambda : V^\lambda \to V^\lambda$ буде прямою сумою клітин Жордана $J_t(\lambda)$. Позначимо $d_i(\lambda) = \dim \mathrm{Ker}(\lambda\mathrm{I} - A)^i$, $i > 0$ ($d_l = d_{s_\lambda}$, якщо $l > s_\lambda$). Тоді

 (a) кількість базисних векторів кореневого підпростору V^λ дорівнює $k_\lambda = d_{s_\lambda}(\lambda)$;

 (b) кількість клітин Жордана дорівнює розмірності власного простору $d_1 = \dim_\Bbbk V_\lambda$;

 (c) максимальна розмірність клітин Жордана в розкладі матриці A дорівнює числу s_λ;

 (d) Кількість $q_t(\lambda)$ клітин Жордана вигляду $J_t(\lambda)$ дорівнює

$$q_t(\lambda) = d_{t+1}(\lambda) - 2d_t(\lambda) + d_{t-1}(\lambda).$$

 (e) Для малих розмірностей можна визначити розмірності $t_1, \ldots, t_{d_1}$ клітин Жордана, що входять до розкладу матриці A так, щоб $t_1 + \ldots + t_{d_1} = k_\lambda$, причому $t_1 = s_\lambda$.

(7) Залишилося для кожної з клітин $J_t(\lambda)$ з розкладу матриці A побудувати ланцюжок v_1, $\ldots$, v_t довжини t з базисних векторів одним із таких способів:

- вибираємо послідовно $v_1, \ldots, v_t$ так, що:
 $v_1 \in V_\lambda$; для v_2 виконується рівність $(\lambda\mathrm{I} - A)v_2 = v_1$, $\ldots$
 для v_t виконується рівність $(\lambda\mathrm{I} - A)v_t = v_{t-1}$;
- в зворотному порядку, виберемо послідовно $v_t, \ldots, v_1$ так, що:

$$v_t \in V^\lambda, \qquad v_{t-1} = (\lambda\mathrm{I} - A)v_t, \qquad \ldots, \qquad v_1 = (\lambda\mathrm{I} - A)v_2 \neq 0.$$

(8) Знаходимо Жорданову нормальну форму $J(A)$ матриці A у вигляді $J(A) = T^{-1}AT$, де T – матриця переходу від старого базису до побудованого канонічного.

(1) Нехай $t = \mathrm{Tr}(A)$ – слід матриці $A \in \mathrm{Mat}_2(\Bbbk)$, і $d = \det(A)$ – її визначник. Знайдіть характеристичний поліном $\chi_A(t)$ матриці A та її власні значення. Якій умові повинна задовольняти матриця A, щоб її ЖНФ містила одну клітину Жордана? Для яких $a \in \Bbbk$ рівняння $(A - a\mathrm{I}) \cdot (A - t\mathrm{I}) = 0$ має розв'язок відносно невідомої t?

(2) Не знаходячи кореневих просторів матриці A, перевірте, що вектор e_1 не є кореневим для A. Обчисліть висоти векторів $v_1, v_2 \in V^2$ матриці A. Чи можуть ці вектори одночасно входити до Жорданового базису матриці A? Побудуйте Жорданів базис матриці A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Проведіть дослідження матриці $A \in \mathrm{Mat}_3(\Bbbk)$ вигляду

$$(i) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad (ii) \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad (iii) \begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Обчисліть характеристичний поліном $\chi_A(t)$ матриці A та її спектр Λ_A.
(b) Для кожного $\lambda \in \Lambda$ знайдіть власний, кореневий та проміжні підпростори $V_\lambda^{(i)} = \mathrm{Ker}(\lambda\mathrm{I} - A)^i$ та їх розмірності $d_i = \dim V_\lambda^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k_\lambda$.
(c) Випишіть ЖНФ матриці A та її мінімальний поліном $\mathtt{m}_A(t)$.
(d) Знайдіть канонічний базис матриці A та випишіть матрицю переходу до цього базису.

(4) Проведіть дослідження матриці $A \in \mathrm{Mat}_4(\Bbbk)$ вигляду

$$(i) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (ii) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad (iii) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Обчисліть характеристичний поліном $\chi_A(t)$ матриці A та її спектр.
(b) Для кожного $(\lambda, k_\lambda) \in \Lambda$ знайдіть власний, кореневий та проміжні підпростори $V_\lambda^{(i)} = \mathrm{Ker}(A - \lambda\mathrm{I})^i$ та їх розмірності $d_i = \dim V_\lambda^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k_\lambda$.
(c) Випишіть ЖНФ матриці A та її мінімальний поліном $m_A(t)$.
(d) Знайдіть Жорданів базис матриці A та випишіть матрицю переходу до цього базису.

(5) Знаючи ЖНФ оператора A, знайдіть ЖНФ оператора $A - \lambda_0\mathrm{I}$; A^{-1}.

(6) Знайдіть ЖНФ та Жорданів базис для матриць $(J_4(\lambda))^2$, $(J_5(\lambda))^2$.

(7) Знаючи ЖНФ оператора A, знайдіть ЖНФ оператора A^2.

(8) Який вигляд має ЖНФ неодиничного оператора A, якщо $A^2 = \mathrm{I}$?

(9) Відомо, що матриця $A \in \mathrm{Mat}_7(\Bbbk)$ має єдине власне значення λ, до того ж $\dim \mathrm{Ker}(\lambda\mathrm{I} - A) = 2$, $\dim \mathrm{Ker}(\lambda\mathrm{I} - A)^2 = 4$, $\dim \mathrm{Ker}(\lambda\mathrm{I} - A)^3 = 5$. Випишіть ЖНФ матриці A та її мінімальний поліном. Чому дорівнює $\dim \mathrm{Ker}(\lambda\mathrm{I} - A)^4$?

(10) Не обчислюючи Жорданового базису, знайдіть ЖНФ для матриць:

$$A1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(11) . Нехай λ - єдине власне значення матриці A кратності k. Вкажіть ЖНФ матриці A для всіх можливих значень $\dim\operatorname{Ker}(\lambda \mathrm{I} - A)$ та $\dim\operatorname{Ker}(\lambda \mathrm{I} - A)^2$.

(12) . Не обчислюючи Жорданового базису, знайдіть ЖНФ для матриць:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(13) Перевірте, що лінійний оператор з матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ анулюється своїм характеристичним поліномом.

(14) Обчисліть ЖНФ та мінімальний поліном для матриць:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(15) Знайдіть характеристичний та мінімальний поліноми матриці A в залежності від значення параметра k, якщо $A = J_2(2) \oplus J_2(3) \oplus J_2(2) \oplus J_1(2) \oplus J_k(3) \oplus J_1(2) \oplus J_2(k)$.

Відповіді

2.3.2. $\chi(t) = t(t-1)^3$. $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \overset{(A-\mathrm{I})}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{(A-\mathrm{I})}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(A-\mathrm{I})}{\Longrightarrow} 0.$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(A-\mathrm{I})}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{(A-\mathrm{I})}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(A-\mathrm{I})}{\Longrightarrow} 0.$ Вектори v_1, v_1 мають висоту 3; вони не можуть входити одночасно в один канонічний базис.

2.3.3. (i)

(1) $\chi(t)=(t-3)^3$, $\Lambda=\{(3,3)\}$.

(2) $V_3=(v_1,v_2)$, $V^3=V_3^{(2)}=\mathbb{R}$, де $v_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

(3) ЖНФ: $J(A)=J_2(3)\oplus J_1(3)$. $\quad m_A(t)=(t-3)^2$.

(4) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-3\mathrm{I})}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-3\mathrm{I})}0;\quad \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-3\mathrm{I})}0.\quad T=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$.

2.3.3. (ii)

(1) $\chi(t)=(t-3)^3$, $\Lambda=\{(3,3)\}$.

(2) $V_3=(v_1)$, $V_3^{(2)}=(v_1,v_2)$, $V^3=V_3^{(3)}=\mathbb{R}$, де $v_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

(3) ЖНФ: $J(A)=J_2(3)\oplus J_1(3)$. $\quad m_A(t)=(t-3)^3$.

(4) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-3\mathrm{I})}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-3\mathrm{I})}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-3\mathrm{I})}0.\quad T=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

2.3.3. (iii)

(1) $\chi(t)=(t-3)(t-1)^2$, $\Lambda=\{(3,1),(1,3)\}$.

(2) $V_1=(v_1)$, $V^1=(v_1,v_2)$, $V_3=V^3=(v_3)$, де $v_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$.

(3) ЖНФ: $J(A)=J_2(1)\oplus J_1(3)$. $\quad m_A(t)=(t-3)(t-1)^2$.

(4) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-\mathrm{I})}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-\mathrm{I})}0;\quad \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-3\mathrm{I})}0.\quad T=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

2.3.4. (i) ЖНФ: $J(A)=J_4(2)$.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-2\mathrm{I})}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-2\mathrm{I})}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-2\mathrm{I})}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-2\mathrm{I})}0$$

2.3.4. (ii) ЖНФ: $J_3(2)\oplus J_1(2)$.

$$V_2=\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\subset\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=V^2\subset\mathbb{R}^4.$$

2.3.4. (iii) ЖНФ: $J_2(2)\oplus J_2(2)$.

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-2\mathrm{I})}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-2\mathrm{I})}0;\qquad \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-2\mathrm{I})}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-2\mathrm{I})}0$$

2.3.6. $A=(J_4(\lambda))^2=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}$.

Якщо $\lambda\neq 0$, то $(A-\lambda^2\mathrm{I})^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 4\lambda^2 & 4\lambda\\ 0 & 0 & 0 & 4\lambda^2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $(A-\lambda^2\mathrm{I})^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 8\lambda^3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

$(A-\lambda^2\mathrm{I})^4=0 \quad\Longrightarrow\quad$ ЖНФ матриці $A=(J_4(\lambda))^2$ є $J_4(\lambda^2)$.

$$\text{Нормальний базис:}\quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-\lambda\mathrm{I})}\begin{pmatrix}0\\1\\2\lambda\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-\lambda\mathrm{I})}\begin{pmatrix}4\lambda\\4\lambda\\0\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-\lambda\mathrm{I})}\begin{pmatrix}8\lambda^2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{(A-\lambda\mathrm{I})}0$$

У випадку $\lambda=0$ маємо: $A=J_4^2(0)$; $A^2=0$ і $|\mathrm{Ker}\,A|_{\Bbbk}=2$, $\quad\Longrightarrow\quad$ ЖНФ матриці A є $J_2(0)\oplus J_2(0)$. Нормальний базис: $e_4\xrightarrow{(A-\lambda\mathrm{I})}e_2\xrightarrow{(A-\lambda\mathrm{I})}0$; $\quad e_3\xrightarrow{(A-\lambda\mathrm{I})}e_1\xrightarrow{(A-\lambda\mathrm{I})}0$.

2.3.7. ЖНФ оператора A^2 можна одержати з ЖНФ для A: в кожній клітці з $\lambda\neq 0$ замінити λ на λ^2; кожну клітину $J_k(0)$ замінити двома клітинами порядку l, якщо $k=2l$ і двома клітинами порядків $l+1$ та l, якщо $k=2l+1$.

2.3.10. ЖНФ: $J(A1)=J_4(1)\oplus J_1(-1)$; $\quad J(A2)=J_3(1)\oplus J_2(-1)$.

2.3.11.

k	$\dim\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{I})$	$\dim\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{I})^2$	ЖНФ
5	1	2	$J_5(\lambda)$
5	2	3	$J_4(\lambda)\oplus J_1(\lambda)$
5	2	4	$J_3(\lambda)\oplus J_2(\lambda)$
5	2	5	не може бути
5	3	4	$J_3(\lambda)\oplus J_1(\lambda)\oplus J_1(\lambda)$
5	3	5	$J_2(\lambda)\oplus J_2(\lambda)\oplus J_1(\lambda)$
5	4	5	$J_2(\lambda)\oplus J_1(\lambda)\oplus J_1(\lambda)\oplus J_1(\lambda)$
5	5	5	$J_1(\lambda)\oplus J_1(\lambda)\oplus J_1(\lambda)\oplus J_1(\lambda)\oplus J_1(\lambda)$

2.3.12. ЖНФ: $J(A_1)=J_3(2)\oplus J_2(2)\oplus J_1(3)$;
$J(A_2)=J_1(2)\oplus J_1(2)\oplus J_1(2)\oplus J_1(2)\oplus J_1(2)\oplus J_1(3)$;
$J(A_3)=J_4(2)\oplus J_1(2)\oplus J_1(3)$;
$J(A_4)=J_3(2)\oplus J_1(2)\oplus J_1(2)\oplus J_1(3)$;
$J(A_5)=J_2(2)\oplus J_2(2)\oplus J_1(2)\oplus J_1(3)$;
$J(A_6)=J_5(2)\oplus J_1(3)$;
$J(A_7)=J_2(2)\oplus J_1(2)\oplus J_1(2)\oplus J_1(2)\oplus J_1(3)$;

2.3.14. ЖНФ: $J(A_1)=J_3(2)\oplus J_1(2)$, $\mathtt{m}_1(t)=(t-2)^3$; $\quad J(A_2)=J_2(2)\oplus J_2(2)$, $\mathtt{m}_2(t)=(t-2)^2$; $J(A_3)=J_4(2)$, $\mathtt{m}_3(t)=(t-2)^4$.

2.3.15. $\chi(t)=(t-2)^6\,(t-3)^{k+2}\,(t-k)^2$, $m(t)=(t-2)^2\,(t-3)^{\min(k,2)}\,(t-k)^2$.