1 Векторні простори

Задача 1.1. *Для ідемпотентної матриці* $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$

a) знайти "канонічний"розклад $\mathbb{R}^4 = Im\,\mathrm{L}_P \oplus Ker\,\mathrm{L}_P$ *(*$= Im\,\mathrm{L}_P \oplus Im\mathrm{L}_{\mathbb{I}_4-P}$*), тобто вказати базиси цих підпросторів;*

b) знайти проекції базисних одиниць e_1, e_2, e_3, e_4 *на підпростір* $Im\,\mathrm{L}_P$ *паралельно до* $Ker\,\mathrm{L}_P$*;*

c) виписати матриці проекцій $\pi_1 : \mathbb{R}^4 \to Im\,\mathrm{L}_P$ *та* $\pi_2 : \mathbb{R}^4 \to Ker\,\mathrm{L}_P$*, якщо в просторі* $\mathbb{R}^4$ *вибрано стандартний базис, а в просторах* $Im\,\mathrm{L}_P$*,* $Ker\,\mathrm{L}_P$ *– базиси з пункту a).*

знайти базис фактор-простору $\mathbb{R}^4/Ker\,\mathrm{L}_P$ *та визначити проекцію* $\tau : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4/Ker\,\mathrm{L}_P$ *у стандартному базисі;*

d) визначити, яка з систем (i) $e_1+\ Ker\,\mathrm{L}_P$*,* $e_2+\ Ker\,\mathrm{L}_P$ *(ii)* $e_1+\ Ker\,\mathrm{L}_P$*,* $e_3+\ Ker\,\mathrm{L}_P$ *буде базисом фактор-простору* $\mathbb{R}^4/Ker\,\mathrm{L}_P$ *?*

Розв'язання.

Крок 1. *Знаходимо базис* $\mathrm{Im}\ \mathrm{L}_P$ *як максимальну лінійно незалежну підсистему векторів-стовпчиків матриці* P *та аналогічно базис* $\mathrm{Im}\ \mathrm{L}_{\mathbb{I}-P}$*. Маємо:* $\mathrm{Im}\ \mathrm{L}_P = \mathbb{R}(v_1, v_2)$, $\mathrm{Im}\ \mathrm{L}_{\mathbb{I}_4-P} = \mathbb{R}(v_3, v_4)$*, де*

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Крок 2. *Знайдемо координати базисних векторів стандартного базису* $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *простору* $\mathbb{R}^4$ *в базисі* $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$*. Позначимо* $T = T_{\mathcal{E},\mathcal{V}}$ *матрицю переходу. Тоді* $[e_i]_{\mathcal{V}} = T^{-1}[e_i]_{\mathcal{E}}$*. Маємо:*

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} e_1 & = & (v_1) + (v_3 + v_4) \\ e_2 & = & (v_1) + (v_3) \\ e_3 & = & (v_2) + (v_3 + v_4) \\ e_4 & = & (v_1) + (v_4) \end{array}$$

Позначимо π *проекцію* $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}(v_1, v_2)$ *паралельно підпростору* $\mathbb{R}(v_3, v_4)$*, тоді*

$$\begin{array}{rcl} \pi(e_1) & = & v_1 \\ \pi(e_2) & = & v_1 \\ \pi(e_3) & = & v_2 \\ \pi(e_4) & = & v_1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad {}_{\{v_1,v_2\}}[\pi]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Крок 3. *Оскільки* $Ker\,\mathrm{L}_P = \mathrm{Im}\ \mathrm{L}_{\mathbb{I}_4-P} = \mathbb{R}(v_3, v_4)$*, то базис фактор-простору* $\mathbb{R}^4/Ker\,\mathrm{L}_P = \mathbb{R}^4/\mathbb{R}(v_1, v_2)$ *складається з класів* $\overline{v_1}$*,* $\overline{v_2}$*, при цьому маємо:*

$\tau(e_1) = \overline{e_1} = \overline{(v_1) + (v_3 + v_4)} = \overline{v_1}$;

$\tau(e_2) = \overline{e_2} = \overline{v_1 + v_3} = \overline{v_1}$;

$\tau(e_3) = \overline{e_3} = \overline{(v_2) + (v_3 + v_4)} = \overline{v_2}$;

$\tau(e_4) = \overline{e_4} = \overline{(v_1) + (v_4)} = \overline{v_1}$, *а отже* $[\tau] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Крок 4. *Оскільки* $\overline{e_1} = \overline{e_2}$*, то ці фактор-класи не утворюють базису фактор-простору* $\mathbb{R}^4/Ker\,\mathrm{L}_P$*. Натомість фактор-класи* $\overline{e_1} = \overline{v_1}$*,* $\overline{e_3} = -4\overline{v_1} + \overline{v_2}$ *утворюють базис простору* $\mathbb{R}^4/Ker\,\mathrm{L}_P$*.*

Задача 1.2. *Нехай* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V = \Big(v_1, v_2\Big) \subset \mathbb{R}^3$, $W = \Big(w\Big) \subset \mathbb{R}^3$.

Показати, що $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$. *Знайти проекцію* $\pi_V : \mathbb{R}^3 \to V$ *простору* $\mathbb{R}^3$ *на підпростір* V *паралельно до підпростору* W *та проекцію* $\pi_W : \mathbb{R}^3 \to W$ *паралельно до підпростору* V. *Визначити проектори* $p_V, p_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *та відповідні ідемпотентні матриці* P_V, P_W. *Перевірити, що* p_V, p_W *утворюють повну систему взаємно ортогональних проекторів.*

Розв'язання.

Крок 5. *Неважко перевірити, що система векторів* $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, w\}$ *лінійно незалежна, а оскільки ці вектори належать* $\mathbb{R}^3$, *то система* $\mathcal{V}$ *є максимальною, тобто базисом, звідки* $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}(v_1, v_2, w) = \mathbb{R}(v_1, v_2) \oplus \mathbb{R}(w) = V \oplus W$. *Випишемо матриці відображень канонічного занурення:* $[\sigma_V] = {}_{\mathcal{E}}[\sigma_V]_{\{v_1,v_2\}}$ *та* $[\sigma_W] = {}_{\mathcal{E}}[\sigma_W]_{\{w\}}$. *Маємо:*

$$[\sigma_V] \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad\qquad [\sigma_W] \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Крок 6. *Знайдемо координати базисних векторів стандартного базису* $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *простору* $\mathbb{R}^3$ *в базисі* $\mathcal{V}$. *Позначимо* $T = T_{\mathcal{E},\mathcal{V}}$ *матрицю переходу. Тоді* $[e_i]_{\mathcal{V}} = T^{-1}[e_i]_{\mathcal{E}}$. *Маємо:*

$$T \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{rcl} e_1 & = & (v_2 - v_1) + w \\ e_2 & = & (2v_1 - v_2) - w \\ e_3 & = & v_1 - w \end{array}$$

Крок 7. *Випишемо матриці відображень проекцій* $[\pi_V] = {}_{\{v_1,v_2\}}[\pi_V]_{\mathcal{E}}$ *та* $[\pi_W] = {}_{\{w\}}[\pi_W]_{\mathcal{E}}$. *Маємо:*

$$[\pi_V] \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad [\pi_W] \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перевірка: мають виконуватися рівності:

$$\pi_V\sigma_V = \mathbb{I}_{\dim_{\mathbb{R}} V} = \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_W\sigma_W = \mathbb{I}_{\dim_{\mathbb{R}} W} = \mathbb{I}_1 = (1).$$

Крок 8. *Матриці* P_V, P_W *проекторів* $p_V, p_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *можна обчислювати двома способами.*

Спосіб 1. $\quad P_V \;=\; \sigma_V\pi_V, \quad P_W \;=\; \sigma_W\pi_W.$

Спосіб 2.

$$P_V = T\,(\mathbb{I}_2 \oplus \mathbb{O}_1)\,T^{-1} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}, \quad P_W = T\,(\mathbb{I}_1 \oplus \mathbb{O}_2)\,T^{-1} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}.$$

В результаті обчислень одержимо:

$$P_V \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_W \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Крок 9. *Перевірка: Матриці* P_V, P_W *повинні утворювати повну систему взаємно ортогональних проекторів в просторі* $\mathbb{R}^3$, *тому мають виконуватися рівності:*

$$P_V^2 = P_V, \quad P_W^2 = P_W, \quad P_VP_W = \underline{0}, \quad P_WP_V = \underline{0}, \quad P_V + P_W = \mathbb{I}_3.$$

Крок 10. *Перевірка: Наступні розбиття простору* $\mathbb{R}^3$ *в пряму суму підпросторів рівні:*

$$\mathbb{R}^3 = V \oplus W \;=\; \operatorname{Ker} P_W \oplus \operatorname{Ker} P_V \;=\; \operatorname{Im}\, P_V \oplus \operatorname{Ker} P_V \;=\; \operatorname{Ker} P_W \oplus \operatorname{Im}\, P_W \;=\; \operatorname{Im}\, P_V \oplus \operatorname{Im}\, P_W.$$