

9 Множення матриць. Обернені матриці

Композиція лінійних відображень

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{L_A} \mathbb{K}^m \xrightarrow{L_B} \mathbb{K}^l \quad \Longrightarrow \quad L_B \cdot L_A = L_{BA} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^l$$

1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(а) знайдіть композиції $L_B \cdot L_A$ та $L_A \cdot L_B$;

(б) знайдіть образ вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ відносно лінійного відображення $L_A \cdot L_B$;

(с) знайдіть образ вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ відносно лінійного відображення $L_B \cdot L_A$.

2. Обчисліть матричну степінь $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k$ та значення $f(A)$ многочлена $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$.

3. Знайдіть усі 2×2 -матриці, які перестановочні з матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Множення на елементарні матриці

$$E_{ij}(\lambda) = E + \lambda e_{ij}; \quad S_{ij} = E - e_{ii} - e_{jj} + e_{ij} + e_{ji}; \quad D_i(\lambda) = E - e_{ii} + \lambda e_{ii} \\ (E_{ij}(\lambda))^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$$

- $\boxed{i}_r \longrightarrow \boxed{i}_r + \lambda \boxed{j}_r \quad \equiv \quad A \longrightarrow E_{ij}(\lambda)A$
- $\boxed{i}_r \longleftrightarrow \boxed{j}_r \quad \equiv \quad A \longrightarrow S_{ij}A$
- $\boxed{i}_r \longrightarrow \lambda \boxed{i}_r \quad \equiv \quad A \longrightarrow D_i(\lambda)A$
- $\boxed{j}_c \longrightarrow \boxed{j}_c + \lambda \boxed{i}_c \quad \equiv \quad A \longrightarrow AE_{ij}(\lambda)$

Розв'язування матричного рівняння $AX = B$ методом елементарних перетворень матриці:

$$AX = B \quad \Longrightarrow \quad (TA)X = TB \quad \Longrightarrow \quad (A|B) \rightarrow (E|A^{-1}B)$$

1. Розв'яжіть матричні рівняння: $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Знайдіть обернені до матриць: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. Представте матрицю як добуток елементарних: $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ([К., 4.3.2, б), с. 50])

Додому:

1. [Костр., 4.1.5, а), с. 46]
2. [Костр., 4.2.3, а), д), с. 48]
3. [Костр., 4.2.8, а), в), с. 48]
4. [Костр., 4.2.10, а), с. 49]
5. [Костр., 4.3.2, а), с. 50]

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -5 & -12 \end{pmatrix}$$