

12 Визначники - додаток

1. Обчисліть визначник

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

2. Обчисліть визначник (ФС 337)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \vdots & a & a \\ -a & x & a & \vdots & a & a \\ -a & -a & x & \vdots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ -a & -a & -a & \vdots & x & -a \\ -a & -a & -a & \vdots & -a & x \end{vmatrix} = (x+a)\Delta_{n-1} - a \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 1 & x & a & \dots & a \\ 1 & -a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -a & -a & \dots & x \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_n = (x+a)\Delta_{n-1} - a(x-a)^{n-1} = \frac{(x+a)^n + (x-a)^n}{2}.$$

3. Обчисліть циклічний визначник

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & n \\ n & 1 & 2 & \vdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \vdots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \vdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

4. Визначник Вандермонда:

$$\delta_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Обчисліть:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 72; \quad [\text{Костр., 3.6.1, ж), и), с.39}].$$

Додому:

1. [Костр., 3.6.1, а), в), е), с. 39]
2. [Костр., 3.4.1, с. 34]
3. [Костр., 3.4.2, с. 35]