2 Комплексні числа

Поле комплексних чисел. Алгебраїчна та тригонометрична форми запису

1. Знайдіть модуль і аргумент комплексного числа $z = \sin\frac{6\pi}{5} + i\left(1 + \cos\frac{6\pi}{5}\right)$.
2. Запишіть в тригонометричній формі: a) $1 - i$; b) $3 + 4i$.
3. Обчисліть: $(\sqrt{2} - i)^{-1}$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{-1}$.
4. Обчисліть: $(2 + 3i)(4 - 5i) + (2 - 3i)(4 + 5i)$.
5. Обчисліть: $(x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 - i)$.
6. Обчисліть: $(\sqrt{3} - i)^{12}$.
7. Обчисліть: $\frac{(1 + i)^{1987}}{(1 - i)^{1989}}$.
8. Виконайте дії в алгебраїчній та геометричній формі: $(1 + i)^6 + (1 - i)^6$.
9. Застосовуючи формулу Муавра, представте $\operatorname{tg} 5\varphi$ через $\operatorname{tg}\varphi$.
10. Представте $\sin^5\varphi$, $\cos^5\varphi$ лінійно через тригонометричні функції кратних аргументів.

Властивості спряження

11. Покажіть, що операція спряження $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\sigma : a + bi \mapsto a - bi$ комутує з операціями додавання та множення, тобто, що операція спряження σ є автоморфізмом поля $\mathbb{C}$.
12. Покажіть, що
    a) для довільного $z \in \mathbb{C}$ виконується рівність $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$;
    b) $z \in \mathbb{C}$ є дійсним числом тоді і лише тоді, коли $\bar{z} = z$;
    c) $z \in \mathbb{C}$ є число уявним числом тоді і лише тоді, коли $\bar{z} = -z$;
    d) добуток двох комплексних чисел $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ є дійсним тоді і лише тоді, коли $z_1 = r\bar{z}_2$ для деякого $r \in \mathbb{R}$.
13. Доведіть, що добуток двох чисел, кожне з яких є сумою квадратів цілих чисел, є також сумою квадратів цілих чисел.
14. Знайдіть усі комплексні числа, спряжені до свого квадрата; до свого куба.
15. Для $z \in \mathbb{C}$, $z \neq \pm 1$, доведіть, що комплексне число $\frac{z-1}{z+1}$ буде чисто уявним тоді і тільки тоді, коли $|z| = 1$.
16. Доведіть, що комплексне число z $(z \neq -1)$ можна записати у вигляді $z = \frac{1 + it}{1 - it}$, де $t \in \mathbb{R}$ - дійсне число, тоді і тільки тоді, коли $|z| = 1$. Зобразіть на площині множину точок, які відповідають таким числам z.

Геометрична інтерпретація

17. Зобразіть на комплексній площині геометричне місце точок, що відповідають числам $z \in \mathbb{C}$, які задовольняють умовам: a) $|argz| < \pi/4$; b) $2 < z\bar{z} \leqslant 4$; c) $2 \leqslant |z - 3i| \leqslant 3$;
    d) $\frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$; e) $|z + \bar{z}| \leqslant 6$; g) $|z - \bar{z}| = 2$.
18. Дайте геометричне тлумачення нерівностей $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$,
    $|\alpha - \beta| \geqslant |\alpha| - |\beta|$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
19. Запишіть в комплексній формі рівняння прямої $y = kx + b$, де k і b – дійсні числа.
20. Запишіть в комплексній формі рівняння кола $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

Застосування до комбінаторики

21. Знайдіть суми a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$; b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$

22. Покажіть, що $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$.

23. Покажіть, що $\cos^2 x + \cos^2 2x + \ldots + \cos^2 nx = \dfrac{n}{2} + \dfrac{\cos(n+1)x \cdot \sin nx}{2\sin x}$.

Додому:

1. [Костр., 6.2.1, з) – о), с.74] Знайдіть тригонометричну форму числа:
   о) $\sqrt{3} - i$; п) $1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; ф) $\dfrac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.
2. [Костр., 6.1.3, а), с.73] Доведіть рівність $(1+i)^{8n} = 2^{4n}$.
3. [Костр., 6.2.8, б), в), с.75] Обчисліть вираз: б) $\left(\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^n$.
4. Розвяжіть рівняння 1) $z^2 + |z| = 0$; 2) $z^2 + \bar{z} = 0$.
5. [Костр., 6.2.10, а) б), с.75] Зобразіть у вигляді поліномів від $\sin\varphi$ та $\cos\varphi$ функції:
   а) $\sin 4\varphi$; б) $\cos 4\varphi$ та знайдіть вираз $\mathrm{tg}\,4\varphi$ через $\mathrm{tg}\,\varphi$.
6. [Костр., 6.2.12, а), б), с.75] Представте $\sin^4\varphi$, $\cos^4\varphi$ лінійно через тригонометричні функції кратних аргументів.
7. [Костр., 6.6.5, с.82] Зобразіть на площині геометричне місце точок, що відповідають числам $z \in \mathbb{C}$, які задовольняють умовам: б) $arg z = \pi/3$; г) $|z - 1 - i| < 1$; е) $2 < |z| < 3$.
8. Обчисліть вирази a) $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}$; b) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{16}$; c) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^{200}$.

Додаткова задача

9. Припустимо, що у вершинах квадрата закріплені чотири годинники, які показують однаковий час. Покажіть, що поки годинники йдуть, кінці стрілок завжди будуть утворювати квадрат.

Відповіді

1. $2\cos\dfrac{3\pi}{5}$, $\dfrac{9\pi}{10}$.

2. a) $\sqrt{2}(cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4})$; b) $5(cos\varphi + i\sin\varphi)$, де $\varphi = \arcsin\left(\dfrac{3}{5}\right)$;

4. 46. **5**. $x^4 + 4$. **6**. 2^{12}. **7**. $\dfrac{1}{2}$. **8**. 0.

9. $\mathrm{tg}\,5\varphi = \dfrac{5\,\mathrm{tg}\,\varphi - 10\,\mathrm{tg}^3\varphi + \mathrm{tg}^5\varphi}{1 - 10\,\mathrm{tg}^2\varphi + 5\,\mathrm{tg}^4\varphi}$;

10. $\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\alpha^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi$,
$\cos k\varphi = \dfrac{\alpha^k + \bar{\alpha}^k}{2}$, $\sin k\varphi = \dfrac{\alpha^k - \bar{\alpha}^k}{2i} \Longrightarrow \sin^5\varphi = \dfrac{\sin 5\varphi - 5\sin 3\varphi + 10\sin\varphi}{16}$.

14. a) 0, 1, $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) 0, ± 1; $\pm i$.

16. $t = \dfrac{z-1}{i(z+1)}$, $\bar{t} = t$; Коло радіуса 1, крім точки $z = -1$; $t = \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$, $-\pi < \varphi < \pi$.

19. $k(z + \bar{z}) + 2b + i(z - \bar{z}) = 0$; **20**. $z\bar{z} + z + \bar{z} = 0$.

21. $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4})$;

22. $\alpha = \cos\dfrac{x}{2} + i\sin\dfrac{x}{2}$, $T \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$, $S \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx \Longrightarrow$

$$S + iT = \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2n} = \alpha^{n+1}\frac{\alpha^n - \alpha^{-n}}{\alpha - \alpha^{-1}}.$$