Г.М.КУДРЯВЦЕВА

ЕВКЛІДОВІ І УНІТАРНІ ПРОСТОРИ. ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

Київський Національний Університет імені Тараса Шевченка

Г.М.КУДРЯВЦЕВА

ЕВКЛІДОВІ І УНІТАРНІ ПРОСТОРИ. ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

Навчальний посібник

Київ — 2006

Даний посібник укладено на основі практичних занять, які автор веде на механіко–математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Містить повні розв'язання усіх типових задач. Може бути використаний усіма, хто вивчає білінійні і квадратичні функції, евклідові і унітарні простори, зокрема, студентами математичних спеціальностей університетів.

Укладач: Г.М.Кудрявцева, канд. фіз.-мат. наук

Рецензенти: Ю.В.Боднарчук, д-р фіз.-мат. наук,
В.М.Бондаренко, д-р фіз.-мат. наук.

Затверджено до друку Вченою Радою
механіко–математичного факультету
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
(*протокол №6 від 14 грудня 2005 року*)

Зміст

Передмова

Даний посібник укладено на основі матеріалів практичних занять з нормативного курсу лінійної алгебри, які автор веде на механіко–математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка. В цьому курсі основи теорії евклідових та унітарних просторів розглядають, як правило, протягом другої половини другого семестру. Матеріал посібника передбачає знайомство з усіма темами нормативного курсу лінійної алгебри, що вивчається у першому та напочатку другого семестрів.

Мета даного посібника — повністю охопити основну частуну практичних задач, які розглядаються на практичних заняннях під час вивчення теми "Евклідові і унітарні простори"у другій половині другого семестру. Наведено усі необхідні теоретичні відомості, близько 40 прикладів розв'язування типових задач та більш ніж 110 задач для самостійного розв'язування. Джерелом більшості наведених у посібрнику задач є класичні задачники [1], [2], [3], у той же час деякі із запропонованих задач (як обчислювального, так і теоретичного характеру) є оригінальними.

Посібник складається із шести тематичних розділів, кожен з яких поділено на три частини: перша частина — необхідний теоретичний матеріал, друга — приклади розв'язування задач (усіх типів стандартних обчислювальних задач, а також багатьох задач теоретичного характеру), і третя – задачі для самостійного розв'язування.

Кожен із розділів може бути основою одного або двох практичних занять. Для розгляду на такому занятті рекомендується використовувати як приклади, наведені в посібнику із розв'язаннями, так і задачі для самостійного розв'язування. Для домашнього завдання задачі слід підбирати саме з третьої частини кожного розділу. Для найкращого оволодіння матеріалом настійливо рекомендується самостійне опрацювання студентами усіх прикладів, наведених у посібнику із розв'язаннями.

В кінці наводиться список рекомендованої літератури. Він містить класичні збірники задач, що містять, зокрема, задачі підвищеної складності, і посібники, за якими можна вивчати як матеріал у межах нормативного курсу лінійної алгебри, так і додатковий позапрограмний матеріал.

Позначення

A^t — матриця, транспонована до матриці A;
$\mathbb{C}$ — поле комплексних чисел;
$\det(M)$ — визначник матриці M;
$diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — діагональна матриця порядку n з послідовністю діагональних елементів $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$;
$\dim(V)$ — розмірність векторного простору V;
F^n — n-вимірний арифметичний векторний простір над полем F.
$G(a_1, \ldots, a_k)$ — матриця Грама від векторів $a_1, \ldots, a_k$;
$\Gamma(a_1, \ldots, a_k)$ — визначник Грама від векторів $a_1, \ldots, a_k$;
$\mathrm{Im} f$ — образ лінійного відображення f;
$Im(z)$ — уявна частина комплексного числа z;
$\mathrm{Ker} f$ — ядро лінійного відображення f;
$M_n(F)$ — простір матриць порядку n над полем F;
$\binom{n}{k}$ — біноміальний коефіцієнт, дорівнює кількості (невпорядкованих) k- елементних підмножин у n- елементній множині;
$ort_L(x)$ — ортогональна складова вектора x відносно відпростору L евклідового простору;
$pr_L(x)$ — ортогональна проекція вектора x на підпростір L евклідового простору;
$Re(z)$ — дійсна частина комплексного числа z;
$\mathbb{R}_n[x]$ — простір дійсних многочленів степеня не вище n;
$tr(A)$ — слід матриці A;
V^* — векторний простір, спряжений до простору V;
$(x_1, \ldots x_n)^t$ — вектор-стовпчик $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
$\overline{z}$ — спряжене до комплексного числа z;
$|z|$ — модуль комплексного числа z;
$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел.
φ^{-1} — лінійний оператор, обернений до невиродженого лінійного оператора φ;
φ^* — лінійний оператор, спряжений до лінійного оператора φ;
$\chi_A(x)$ — характеристичний многочлен матриці A.

1 Лінійні функції

Усі векторні простори, які будуть розглядатися у посібнику, вважаються *скінченновимірними.*

Нехай V — векторний простір над полем F. Функція $f : V \to F$ називається *лінійною*, якщо для довільних $u, v \in V$ і довільних $\alpha, \beta \in F$ виконується

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

F можна розклядати як одновимірний арифметичний векторний простір F^1 над F (із базисом (1), де 1 — одиниця поля F). Тому лінійна функція є частковим випадком лінійного відображення векторних просторів: лінійна функція на векторному просторі V над F — це лінійне відображення із V до одновимірного арифметичного векторного простору F^1. Тому зафіксувавши базиси у V і у F^1 можна говорити про матрицю лінійної функції.

Нехай $v_1, \ldots, v_n$ — базис простору V і $f : V \to F$ — лінійна функція. Матрицею лінійної функції f у базисі $v_1, \ldots, v_n$ (у просторі F^1 зафіксуємо базис (1)) називається $1 \times n$- матриця $(f(v_1), \ldots f(v_n))$. Нехай вектор $v \in V$ має у базисі $v_1, \ldots, v_n$ координати $(x_1, \ldots, x_n)$. Тоді $f(v) = f(v_1)x_1 + \ldots f(v_n)x_n$ — вираз значення лінійної функції від вектора v через його координати. Вираз, що стоїть у правій частині останньої рівності, називається *лінійною формою* від змінних $x_1, \ldots, x_n$.

Множина всіх лінійних функцій на V утворює векторний простір над F (відносно звичайних операцій додавання функцій і множення функції на скаляр), який називається *спряженим* до V і позначається V^*.

Теорема 1. $\dim(V^*) = \dim(V) = n$, *базис простору* V^* *складають функції* δ_i, $1 \leq i \leq n$, *визначені правилом:*

$$\delta_i(v_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Базис простору V^*, наведений у теоремі 1, називається *спряженим* до базису $v_1, \ldots, v_n$ простору V.

Якщо лінійна функція $f : V \to F$ не є тотожно нульовою, то її образ $\mathrm{Im} f$ збігається із полем F і є одновимірним, а її ядро $\mathrm{Ker} f$ є $(n-1)$-вимірним підпростором V, де $n = \dim V$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. *Нехай* $V = F^n$ *і* $f : V \to F$ *задана правилом* $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$. *Перевірити, що* f *є лінійною функцією, знайти її матрицю у стандартному базисі простору* V, *а також знайти базис* $\mathrm{Ker} f$.

Перевірика лінійності f. Нехай $u = (x_1, \dots, x_n)$, $v = (y_1, \dots, y_n) \in V$, $\alpha, \beta \in F$. Тоді

$$f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x_1 + \beta y_1 + \dots + \alpha x_n + \beta y_n = \alpha(x_1 + \dots + x_n) + \beta(y_1 + \dots + y_n) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

Нехай базис простору фіксовано. Стовпчики матриці лінійної функції — це, згідно визначення, значення функції на базисних векторах. Тому оскільки сума координат будь-якого із векторів стандартного базису дорівнює 1, то матриця функції f у стандартному базисі $e_1, \dots, e_n$ — це рядок $(1, 1, \dots, 1)$.

Нарешті, знайдемо ядро f. За визначенням, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Ker} f \iff x_1 + \dots + x_n = 0$. Тому $\mathrm{Ker} f$ збігається із простором розв'язків вказаного однорідного лінійного рівняння. Базисом цього простору є довільна фундаментальна система розв'язків (надалі — ФСР) даного однорідного лінійного рівняння, наприклад, така:

$$\begin{array}{lcl} v_1 & = & (-1, 1, 0, \dots, 0, 0); \\ v_2 & = & (-1, 0, 1, \dots, 0, 0); \\ & \dots & \\ v_{n-1} & = & (-1, 0, 0, \dots, 1, 0); \\ v_n & = & (-1, 0, 0, \dots, 0, 1). \end{array}$$

Приклад 2. *Довести, що для довільної ненульової лінійної функції* $f : V \to F$ *на* n*-вимірному векторному просторі* V *знайдеться базис* $u_1, \dots, u_n$ *простору* V, *такий, що*

$$f(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) = x_1$$

для довільного вектора $x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \in V$.

Оскільки f за умовою не є тотожним нулем, то $\dim(\mathrm{Ker} f) = n - 1$. Зафіксуємо у просторі $\mathrm{Ker} f$ деякий базис $u_2, \dots, u_n$. Доповнимо цей набір векторів до базису V, приєднавши деякий вектор u_1'. Покладемо

$u_1 = \frac{u_1}{f(u_1)}$ (зауважимо, що u_1 визначений коректно, тому що $f(u_1) \neq 0$). Тоді, виходячи із рівностей $f(u_1) = 1$, $f(u_2) = \cdots = f(u_n) = 0$, маємо

$$f(x_1u_1 + \cdots + x_nu_n) = x_1f(u_1) + x_2f(u_2) + \cdots + x_nf(u_n) = x_1f(u_1) = x_1.$$

Приклад 3. *Нехай $V = \mathbb{R}_n[x]$. Для кожного i, $0 \leq i \leq n$, визначимо функцію $a_i : V \to \mathbb{R}$ правилом $a_i(f) = f(i)$, $f \in V$. Довести що кожна з визначених функцій є лінійною, і що a_0, a_1, ..., a_n складають базис простору V^*.*

Оскільки $\dim(V^*) = \dim(V) = n + 1$, то достатньо показати, що функції a_0, a_1, ..., a_n є лінійно незалежними.

Припустимо, що $\alpha_0 a_0 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$ для деяких $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Це означає, що для довільного многочлена $f \in \mathbb{R}_n[x]$ виконується рівність $(\alpha_0 a_0 + \cdots + \alpha_n a_n)(f) = 0$. Зокрема, ця рівність виконується для $f_0 = 1$, $f_1 = x$, ..., $f_n = x^n$, тому отримаємо $n + 1$ рівність:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n = 0, \\ \ldots \\ \alpha_1 + 2^n\alpha_2 + \cdots + n^n\alpha_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Набір $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ повинен бути розв'язком отриманої однорідної системи лінійних рівнянь. Визначник цієї системи дорівнює

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2^n & \ldots & n^n \end{vmatrix} = n! \cdot B(1, 2, \ldots, n) \neq 0,$$

де через $B(1, 2, \ldots, n)$ ми позначили значення визначника Вандермонда від $1, 2, \ldots, n$. Тому система рівнянь (1) має єдиний розв'язок — нульовий. Отже, за визначенням лінійно незалежної системи векторів функції $a_0, \ldots, a_n$ є лінійно незалежними.

Приклад 4. *Довести, що для базису $a_0, \ldots, a_n$ простору V^* із попередньої задачі існує единий базис простору V, для якого $a_0, \ldots, a_n$ є спряженим. Знайти цей базис.*

За визначенням спряженого базису, ми шукаємо такий базис $f_0, \ldots, f_n$ простору $\mathbb{R}_n[x]$, що

$$f_i(j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

$0 \le i \le n$. Згідно із розв'язанням інтерполяційної задачі, існує рівно один многочлен степеня не вище, ніж n, який у заданих n точках приймає задані значення. Знайдемо многочлен f_i за допомогою інтерполяційної формули Лагранжа:

$$f_i = \frac{x \cdot (x-1) \cdot \dots \cdot (x-i+1) \cdot (i+1-x) \cdot \dots \cdot (n-x)}{i \cdot (i-1) \dots 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot (n-i)}.$$

Приклад 5. *Нехай f, g — дві лінійні функції на векторному просторі V і $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$. Довести, що f і g відрізняються лінійним множником.*

Якщо $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g = V$, то твердження очевидне. Нехай тепер $\dim(\mathrm{Ker} f) = \dim(\mathrm{Ker} g) = n-1$. Нехай $u_2, \dots, u_n$ — базис $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$. Доповнимо його вектором u_1' до базису V. Покладемо $u_1 = \frac{u_1'}{f(u_1')}$. Тоді $f(u_1) = 1$, $g(u_1) = \frac{g(u_1')}{f(u_1')}$. Крім того для $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ маємо, що $f(x) = x_1$ (див. також розв'язання прикладу 2), $g(x) = \frac{g(u_1')}{f(u_1')} x_1 = \frac{g(u_1')}{f(u_1')} f(x)$. Отже, g пропорційна до f із коефіцієнтом пропорційності $\frac{g(u_1')}{f(u_1')}$.

Задачі

1.1 Нехай $V = F^n$ і $f_i : V \to F$, $1 \le i \le 3$, задані правилами:

а) $f_1(x_1, \dots, x_n) = -x_1 + x_2 + \dots + (-1)^n x_n$;

б) $f_2(x_1, \dots, x_n) = x_2 + x_4 + \dots + \frac{(1+(-1)^n)}{2} x_n$;

в) $f_3(x_1, \dots, x_n) = x_1 + 2x_2 + \dots + n x_n$;

Перевірити, що кожна f_i є лінійною функцією, знайти її матрицю у стандартному базисі простору V, а також знайти базис $\mathrm{Ker} f_i$.

1.2 Знайти формулу зміни матриці лінійної функції при зміні базису простору.

1.3 Чи є лінійно залежною система функцій $\{f_1, f_2, f_3\}$, де f_1, f_2, f_3 — функції із задачі 1.1?

1.4 Нехай V — векторний простір над полем F, $v_1, \dots, v_n$ — деякий його базис, і $f : V \to F$. Довести, що функція f є лінійною тоді й лише тоді, коли знайдуться такі $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$, що $f(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ для довільних $x_1, \ldots, x_n \in F$. Тобто, функція є лінійною тоді й лише тоді, коли для кожного базису простору існує лінійна форма, така, що для довільного вектора простору значення функції від цього вектора збігається із значенням відповідної лінійної форми від координат вектора.

1.5 Нехай $V = \mathbb{R}_n[x]$. Для кожного i, $0 \leq i \leq n$, визначимо функцію $b_i : V \to \mathbb{R}$ правилом $b_i(f) = f^{(i)}(0)$, $f \in V$. Довести що кожна з визначених функцій є лінійною, і що b_0, b_1, $\ldots$, b_n складають базис простору V^*.

1.6 Довести, що для базису $b_0, \ldots, b_n$ простору V^* із попередньої задачі існує єдиний базис простору V, для якого $b_0, \ldots, b_n$ є спряженим. Знайти цей базис.

1.7 Нехай $V = \mathbb{R}_n[x]$. Для кожного i, $0 \leq i \leq n$, визначимо функцію $c_i : V \to \mathbb{R}$ правилом $c_i(f) = \int_0^i f(x)\mathrm{dx}$, $f \in V$. Довести що кожна з визначених функцій є лінійною, і що c_0, c_1, $\ldots$, c_n складають базис простору V^*.

1.8 Довести, що n лінійних функцій на n- вимірному векторному просторі є лінійно незалежними тоді й лише тоді, коли перетин їх ядер є нульовим підпростором.

1.9 Нехай

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 = x_2 + x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

Навести приклад двох лінійних функцій f і g на $\mathbb{R}^4$, таких, що $V = \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g$.

1.10 Довести, що будь-який k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору є перетином ядер деяких $n - k$ лінійних функцій на V.

2 Білінійні функції

Нехай V — векторний простір над полем F і $f : V \times V \to F$ — функція від двох аргументів із V. Якщо зафіксувати деякий вектор $v \in V$, то $f_v^1(x) = f(x, v)$, $x \in V$, і $f_v^2(x) = f(v, x)$, $x \in V$, є функціями (від одного аргументу) із V до F.

Означення 1. *Функція $f : V \times V \to F$ називається* лінійною за першим (другим) аргументом*, якщо для будь-якого вектора $v \in V$ функція f_v^1 (відповідно, f_v^2) є лінійною. f називається* білінійною*, якщо вона є лінійною за першим і за другим аргументами.*

Іншими словами, функція $f : V \times V \to F$ називається *білінійною*, якщо для будь-яких $\alpha, \beta \in F$ і для будь-яких $u, v_1, v_2 \in F$ виконуються рівності

- $f(\alpha v_1 + \beta v_2, u) = \alpha f(v_1, u) + \beta f(v_2, u)$;
- $f(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(u, v_1) + \beta f(u, v_2)$.

Теорема 2. *Нехай $V = F^n$ і $f : V \times V \to F$ — деяка функція. f є білінійною тоді й лише тоді, коли знайдуться такі числа $\{a_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$, що*

$$f((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots y_n)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j. \tag{2}$$

Вираз, що стоїть у правій частині формули (2), називається *білінійною формою* від змінних $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. Якщо V — n-вимірний векторний простір, і в ньому зафіксовано базис $v_1, \dots, v_n$, то відображення $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ встановлює ізоморфізм між V і F^n. Тому існує бієктивна відповідність $\varphi_{v_1,\dots,v_n}$ між білінійними функціями на V і білінійними формами від змінних $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$, а саме

$$f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, y_1 v_1 + \dots + y_n v_n) \overset{\varphi_{v_1,\dots,v_n}}{\mapsto} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Матрицею білінійної форми $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ називається матриця $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. *Матрицею білінійної функції* $f : V \times V \to F$ у базисі $v_1, \dots v_n$ простору V називається матриця відповідної їй білінійної форми $\varphi_{v_1,\dots,v_n}(f)$.

Теорема 3. *Нехай* $f : V \times V \to F$ *— білінійна функція,* $v_1, \dots, v_n$ *— базис* V *і* A_v *— матриця* f *у цьому базисі. Тоді для довільних* $x = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$, $y = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n \in V$ *значення* $f(x, y)$ *обчислюється за формулою*

$$f(x, y) = (x_1, \dots, x_n)A_v(y_1, \dots, y_n)^t. \tag{3}$$

Припустимо, що у просторі V задано два базиси: $v_1 \dots, v_n$ і $u_1, \dots, u_n$. Через $B = B_{v \to u}$ позначимо матрицю переходу від базису (v_i) до базису (u_i). Нагадаємо, що за визначенням i-им стовпчик матриці B є стовпчиком координат вектора u_i у базисі $v_1, \dots, v_n$. Нехай A_v і A_u — матриці f у базисах (v_i) і (u_i) відповідно. Тоді

$$A_u = B^t A_v B. \tag{4}$$

Формулу (4) часто називають *формулою зміни матриці білінійної функції при зміні базису простору.*

Відомо, що для довільної невиродженої матриці B і довільної матриці A ранги матриць A і B^tAB однакові. Тому коректним є наступне означення.

Означення 2. Рангом *білінійної функції* f *називається ранг її матриці у деякому (а, отже, у будь-якому) базисі простору* V.

Білінійна функція f на просторі V називається *невиродженою*, якщо її матриця у деякому (а, отже, і у будь-якому) базисі простору V є невиродженою.

Означення 3. *Білінійна функція* $f : V \times V \to F$ *називається*

a) симетричною, *якщо* $f(x, y) = f(y, x)$ *для довільних* $x, y \in V$*;*

b) кососиметричною, *якщо* $f(x, y) = -f(y, x)$ *для довільних* $x, y \in V$.

Теорема 4. *1. Якщо функція* $f(x, y)$ *є симетричною, то її матриця у будь-якому базисі простору є симетричною. Якщо матриця* f *у деякому базисі простору є симетричною, то* $f(x, y)$ *є симетричною.*

2. Якщо функція $f(x, y)$ *є кососиметричною, то її матриця у будь-якому базисі простору є кососиметричною. Якщо матриця* f *у деякому базисі простору є кососиметрчною, то* $f(x, y)$ *є кососиметричною.*

Білінійна форма називається *симетричною* (*кососиметричною*), якщо відповідна їй матриця є симетричною (кососиметричною). Білінійна форма вигляду $\lambda_1 x_1 y_1 + \dots + \lambda_n x_n y_n$ називається *симетричною білінійною формою канонічного вигляду*. Білінійна форма від змінних $x_1, \dots x_n$, $y_1, \dots, y_n$ вигляду $x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + \dots x_{2k-1}y_{2k} - x_{2k}y_{2k-1}$, де $1 \le k \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, називається *кососиметричною білінійною формою канонічного вигляду*.

Дві білінійні форми звуться *еквівалентними*, якщо вони відповідають одній й тій самій білінійній функції (можливо, в різних базисах). *Звести симетричну (кососиметричну) білінійну форму f до канонічного вигляду* означає знайти еквівалентну їй симетричну (відповідно, кососиметричну) білінійну форму g, яка має канонічний вигляд, а також вказати відповідну заміну змінних (або, еквівалентно, відповідну матрицю переходу від базису простору, в якому білінійна функція мала білінійну форму f до базису простору в якому та ж білінійна функція має білінійну форму g). Алгоритми зведення симетричних і кососиметричних білінійних форм до канонічного вигляду містяться у розв'язаннях прикладів 10 і 12.

Приклади розв'язування задач

Приклад 6. *Нехай у просторі V задано два базиси: v_1, v_2, v_3 та $u_1 = v_1 - v_2$, $u_2 = v_1 + v_3$, $u_3 = v_1 + v_2 + v_3$. Білінійну функцію f задано матрицею $A_v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ у базисі v_1, v_2, v_3. Знайти*

а) $f(u_1, u_2)$;

б) матрицю f у базисі u_1, u_2, u_3.

Вектори u_1, u_2, u_3 мають у базисі v_1, v_2, v_3 координати $(1, -1, 0)$, $(1, 0, 1)$ та $(1, 1, 1)$ відповідно. За формулою (3) отримуємо

$$f(u_1, u_2) = (1, -1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -6.$$

Запишемо матрицю переходу від v_1, v_2, v_3 до u_1, u_2, u_3: $B = B_{v \to u} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. За форулою (4) обчислюємо матрицю A_u:

$$A_u = B^t A_v B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix}.$$

Приклад 7. *Нехай $V = M_n(F)$. Довести, що функція $f(A, B) = tr(AB)$ є білінійною та знайти її матрицю у базисі $M_n(F)$, який складається із матричних одиниць. Зокрема, виписати цю матрицю для $n = 2$.*

Лінійність f за першим аргументом випливає із ланцюга рівностей:

$$f(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2, B) = tr((\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)B) = tr(\alpha_1 A_1 B + \alpha_2 a_2 B) = \\ \alpha_1 tr(A_1 B) + \alpha_2 tr(A_2 B) = \alpha_1 f(A_1 B) + \alpha_2 f(A_2 B),$$

$A_1, A_2, B \in M_n(F)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in F$. Лінійність за другим аргументом можна перевірити аналогічно, достатньо однак послатись на симетричнічть f (відомо і неважко перевірити, що $tr(AB) = tr(BA)$, $A, B \in M_n(F)$) і вже встановлену лінійність за першим аргументом.

Впорядкуємо матричні одиниці природним чином:

$$E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{n1}, E_{n2}, \ldots, E_{nn}. \qquad (5)$$

Оскільки $E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il}, \text{ якщо } j = k, \\ 0, \text{ якщо } j \neq k, \end{cases}$ то

$$f(E_{ij}, E_{kl}) = tr(E_{ij}E_{kl}) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } j = k \text{ і } i = l, \\ 0, \text{ в противному разі }. \end{cases}$$

Тепер ми маємо всю необхідну інформацію, щоб описати матрицю A функції f у базисі (5). Це матриця $n^2 \times n^2$. Для зручності проіндексуємо її рядки і стовпчики у тій самій послідовності, що і матричні одиниці (див. (5)): перший рядок і перший стовпчик матимуть індекс 11, другий рядок і другий стовпчик — індекс 12, і.т.д., останній рядок і останній стовпчик — індекс nn. Елементами матриці A є нулі і одиниці. На перетині рядка з індексом ij і стовпчика з індексом kl стоїть одиниця тоді й лише тоді, коли $i = l$ і $j = k$. Зокрема, у кожному рядку і кожному стовпчику зустрічається рівно одна одиниця. У випадку $n = 2$ отримаємо матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Приклад 8. *Довести, що білінійна функція $tr(AB)$ на просторі $M_n(F)$ є невиродженою.*

У попередньому прикладі ми знайшли матрицю білінійної функції $tr(AB)$ у базисі простору $M_n(F)$, що складається із матричних одиниць (див. (5)). Елементами цієї матриці є лише нулі і одиниці, причому в кожному рядку і кожному стовпчику рівно один елемент дорівнює одиниці, а решта — нулю. Перестановкою стовпчиків така матриця зводиться до одиничної. Дійсно, спочатку переставляємо перший стовпчик із тим стовпчиком, на перетині з яким одиниця стоїть у першому рядку. Отримаємо матрицю із одиницею у верхньому лівому куті, в якій знов-таки у кожному рядку і у кожному стовпчику рівно одна одиниця. Далі переставимо другий стовпчик отриманої матриці із тим стовпчиком, на перетині з яким одиниця стоїть у другому рядку. Продовжуючи так далі, через (n^2-1) крок отримаємо одиничну матрицю. Оскільки зроблені елементарні перетворення стовпчиків не змінюють ранг, то початкова матриця, а разом із нею дана білінійна функція, є невиродженою.

Приклад 9. *Довести, що будь-яка білінійна форма $f(x, y)$ рангу 1 може бути записана у вигляді добутку двох лінійних форм $p(x)q(y)$.*

Нехай $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ — матриця даної білінійної форми. Оскільки ранг матриці A дорівнює 1, то ця матриця містить принаймі один ненульовий рядок, до якого пропорційні решта рядків. Виберемо довільний ненульовий рядок матриці A. Припустимо, що це рядок $(a_{l1}, \ldots, a_{ln})$. Нехай α_i, $1 \leq i \leq n$, — коефіцієнт, з яким i-ий рядок пропорційний до вибраного (зокрема, $\alpha_l = 1$). Тоді $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (a_{l1}, \ldots, a_{ln})$. За формулою (3) отримуємо:

$$f(x,y) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (a_{l1}, \dots, a_{ln}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} a_{li} y_i \right).$$

Лишилось покласти $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ і $q(y) = \sum_{i=1}^{n} a_{li} y_i$.

Приклад 10. *Довести, що довільна симетрична білінійна форма над полем F, характеристика якого відмінна від 2, зводиться до канонічного вигляду.*

Припустимо, що білінійна форма $f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ є симетричною, тобто $a_{ij} = a_{ji}$ для будь-яких допустимих i, j. Будемо доводити твердження індукцією за n. Якщо $n = 1$, то твердження, очевидно, справджується. Нехай $n \geq 2$. Запишемо $f(x,y)$ наступним чином:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \tag{6}$$

$$a_{11} x_1 y_1 + a_{12}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + \dots + a_{1n}(x_1 y_n + x_n y_1) + S(x,y), \tag{7}$$

де жоден із доданків в $S(x,y)$ не містить x_1 і y_1. Якщо всі коефіцієнти $a_{11}, \dots, a_{1n}$ рівні нулю, то $f(x,y) = S(x,y)$, і працює індуктивне припущення. Тому можна вважати, що серед скалярів $a_{11}, \dots, a_{1n}$ є хоча б один ненульовий. У випадку, коли $a_{11} \neq 0$ робимо (невироджену) заміну змінних $x_1' = x_1 + x_2$, $x_2' = x_1 - x_2$, $x_3' = x_3$, $\dots$, $x_n' = x_n$ і, відповідно, $y_1' = y_1 + y_2$, $y_2' = y_1 - y_2$, $y_3' = y_3$, $\dots$, $y_n' = y_n$, після якої коефіцієнт при $x_1' y_1'$ вже буде ненульовим (лишаємо читачеві перевірити це і явно знайти цей коефіцієнт). Тому вважаємо, що $a_{11} \neq 0$. Позначимо $\alpha_i = \frac{a_{1i}}{a_{11}}$, $1 \leq i \leq n$. Зробимо таку заміну змінних:

$$x_1' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, x_2' = x_2, \dots, x_n' = x_n;$$

$$y_1' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i, y_2' = y_2, \dots, y_n' = y_n.$$

Після неї формула (7) набуде вигляду

$$f(x, y) = a_{11}x'_1y'_1 + t(x'_2, \dots, x'_n; y'_1, \dots, y'_n).$$

До білінійної форми $t(x'_2, \dots, x'_n; y'_1, \dots, y'_n)$ можна застосувати індуктивне припущення, тобто вважати, що знайдеться така невироджена заміна змінних, яка зведе цю білінійну форму до канонічного вигляду. Тому після цієї заміни змінних $f(x, y)$ також матиме канонічний вигляд.

Приклад 11. *Звести до канонічного вигляду дійсну симетричну білінійну форму, задану своєю матрицею* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Зробимо таку заміну змінних (див. попередній приклад):

$$x'_1 = x_1 + 3x_2 + 2x_3, x'_2 = x_2, x'_3 = x_3$$
$$y'_1 = y_1 + 3y_2 + 2y_3, y'_2 = y_2, y'_3 = y_3.$$

Нехай $f(x, y)$ — симетрична білінійна форма, яка має матрицю A. Нехай C_1 — матриця, що відповідає зробленій заміні змінних. За формулою зміни координат вектора при зміні базису маємо

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = (C_1)^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

що рівносильно рівності

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix},$$

звідки знаходимо $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Згідно формули зміни матриці білінійної функції при зміні базису (формула (4)) отримуємо, що після даної заміни змінних ми отримаємо білінійну форму із матрицею

$$A_1=(C_1)^tAC_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&2\\3&1&4\\2&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&8&-2\\0&-2&-3\end{pmatrix}.$$

На наступному етапі робимо таку заміну змінних

$$x_1''=x_1',x_2''=x_2'-\frac{1}{4}x_3',x_3''=x_3'$$
$$y_1''=y_1',y_2''=y_2'-\frac{1}{4}y_3',y_3''=y_3',$$

знаходимо відповідну їй матрицю переходу $C_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{1}{4}\\0&0&1\end{pmatrix}$, після чого за формулою (4) обчислюємо матрицю A_2 білінійної форми, яку ми отримаємо після цієї заміни змінних:

$$A_2=(C_2)^tA_1C_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{1}{4}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&8&-2\\0&-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{1}{4}\\0&0&1\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&8&0\\0&0&-\frac{7}{2}\end{pmatrix}.$$

Отриманій діагональній матриці відповідає білінійна форма у канонічному вигляді $x_1''y_1''+8x_2''y_2''-\frac{7}{2}x_3''y_3''$. Матриця переходу, що відповідає переходу до канонічного базису дорівнює $C_2C_1=\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&1&\frac{1}{4}\\0&0&1\end{pmatrix}$. Тепер ми легко можемо записати відповідну заміну змінних:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C_2C_1\begin{pmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1''-3x_2''-2x_3''\\x_2''+\frac{1}{4}x_3''\\x_3''\end{pmatrix}.$$

Приклад 12. *Довести, що довільна ненульова кососиметрична білінійна форма зводиться до канонічного вигляду.*

Нехай $f(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j$, причому $a_{ij} = -a_{ji}$ для будь-яких допустимих i,j. Зокрема всі a_{ii} дорівнюють нулю. Перенумерувавши у разі потреби змінні, можемо вважати, що $a_{12} \neq 0$. Скористаємось індукцією за n. Якщо $n = 1$, то $f(x,y)$ мусить бути нульовою, що неможливо за умовою. Якщо $n = 2$, то $f(x,y)$ має канонічний вигляд. Нехай $n \geq 3$. Запишемо задану форму у вигляді

$$f(x,y) = x_1(a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n) - y_1(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + S(x,y)$$

і зробимо невироджену заміну змінних

$$x'_1 = x_1, x'_2 = a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, x'_3 = x_3, \ldots, x'_n = x_n$$

і таке саме перетворення для y_i. Отримаємо

$$f(x,y) = x'_1y'_2 - x'_2y'_1 + S_1(x'_2, \ldots, x'_n; y'_2, \ldots, y'_n).$$

Якщо $S_1(x'_2, \ldots, x_n; y'_2, \ldots, y'_n)$ не містить x'_2, y'_2, то ця форма або нульова, або за індуктивним припущенням зводиться до канонічного вигляду. Тому і $f(x,y)$ також зводиться до канонічного вигляду.

Нехай $S_1(x'_2, \ldots, x_n; y'_2, \ldots, y'_n) = \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a'_{ij}x'_iy'_j$ містить x'_2, y'_2, тобто $a'_{2k} \neq 0$ для деякого k, $2 \leq k \leq n$. Виконаємо невироджену заміну змінних

$$x''_1 = x'_1 - a'_{23}x'_3 - \cdots - a'_{2n}x'_n,\ x''_2 = x'_2,\ \ldots,\ x''_n = x'_n,$$

і аналогічну заміну для y'_i. Отримаємо

$$f(x,y) = x''_1y''_2 - x''_2y''_1 + S_2(x'_3, \ldots, x_n; y'_3, \ldots, y'_n).$$

Якщо $S_2(x'_3, \ldots, x_n; y'_3, \ldots, y'_n) = 0$, то $f(x,y)$ вже зведено до канонічного вигляду. Інакше, за індуктивним припущенням $S_2(x'_3, \ldots, x_n; y'_3, \ldots, y'_n)$ зводиться до канонічного вигляду, звідки випливає, що і f зводиться до канонічного вигляду.

Задачі

2.1 Порівнюючи ранги, показати, що білінійні форми f та g не еквівалентні:

а) $f = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3$, $g = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$;

б) $f = x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3$, $g = x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_3$.

2.2 У просторі V задано два базиси: v_1, v_2, v_3 та $u_1 = v_1 + v_2$, $u_2 = v_1 + 2v_3$, $u_3 = v_1 - v_2 + v_3$. Білінійну функцію f у базисі (v_i) задано матрицею $A_v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Знайти

а) $f(u_1, u_2)$, $f(u_1 + u_2, u_2 + u_3)$, $f(u_1 + u_3, u_1 - u_3)$;

б) матрицю f у базисі u_1, u_2, u_3;

в) матрицю f у базисі u_3, u_2, u_1;

г) матрицю f у базисі $u_1, u_2 + u_3, u_2 - u_3$.

2.3 У просторі $\mathbb{R}_2[x]$ задано два базиси: $h_1 = 1, h_2 = x, h_3 = x^2$ та $g_1 = 1 + x$, $g_2 = 1 - 2x$, $g_3 = 1 + x^2$. Білінійну функцію f у базисі (h_i) задано матрицею $A_h = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти

а) $f(h_1, h_2)$, $f(2 + 2x, 1 + x^2)$, $f(1 + x + x^2, 1 - x)$;

б) матрицю f у базисі g_1, g_2, g_3;

в) матрицю f у базисі g_3, g_2, g_1;

г) матрицю f у базисі $g_1, g_2 - g_3, g_2 + 2g_3$.

2.4 Нехай у просторі V задано базис $v_1, \ldots, v_n$. Нехай, далі, $\mathcal{C}$ — лінійний оператор у просторі V, який у базисі (v_i) має матрицю C, і f — білінійна функція на V, яка у тому ж базисі має матрицю A_v. Довести, що функція $g(x, y) = f(x, \mathcal{C}(y))$ є білінійною і її матриця у базисі (v_i) дорівнює $A_v C$.

2.5 Довести, що функція $f(A, B) = tr(A + B)$ на просторі $M_n(F)$ не є білінійною.

2.6 Довести, що функція $f(A, B) = tr(AB^t)$ на просторі $M_n(F)$ є білінійною та знайти її матрицю у базисі, який складається із матричних одиниць. Виписати, зокрема, знайдену матрицю у випадку $n = 2$.

2.7 Довести, що $E_{11}, \ldots E_{nn}$, $E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, \ldots, E_{n-1,n} + E_{n,n-1}$, $E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, \ldots, E_{n-1,n} - E_{n,n-1}$ є базисом простору $M_n(F)$ та знайти матриці білінійних функцій $tr(AB)$ і $tr(AB^t)$, $A, B \in M_n(F)$, у цьому базисі.

2.8 Розглянемо $\mathbb{C}$ як двовимірний векторний простір над $\mathbb{R}$. У кожному з наступних випадків довести, що функція $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ є білінійною та знайти її матрицю у базисі $1, i$:

а) $f(x, y) = Re(xy)$; б) $f(x, y) = Re(x\overline{y})$; в) $f(x, y) = Im(x\overline{y})$.

2.9 Чи є білінійною функція $f(x, y) = |xy|$, $x, y \in \mathbb{C}$?

2.10 Нехай f — білінійна функція, яка у базисі $v_1, \ldots, v_n$ простору V має матрицю A_v. Як пов'язана із матрицею A_v матриця f у кожному з наступних базисів V:

а) $v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1} \ldots, v_n$;

б) $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + \lambda v_j, v_{i+1} \ldots, v_n$, $j \neq i$;

в) базисі, утвореному із $v_1, \ldots, v_n$ перестановкою векторів v_i і v_j, $j \neq i$?

2.11 Довести, що довільну білінійну функцію можна однозначно подати у вигляді суми симетричної та кососиметричної білінійних функцій.

2.12 Подати наступні білінійні форми у вигляді суми симетричної та кососиметричної білінійних форм:

а) $x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 - 5x_3y_2$;

б) $x_1y_2 - 4x_2y_1 + 2x_2y_2 + 5x_2y_3 - 7x_3y_2 - x_3y_3$.

2.13 Звести до канонічного вигляду кожну з наступних симетричних білінійних форм:

а) $x_1y_1 + 2(x_1y_2 + x_2y_1) - (x_1y_3 + x_3y_1) + 2(x_2y_3 + x_3y_2) - x_3y_3$;

б) $x_1y_1 + 2(x_1y_2 + x_2y_1) - (x_1y_4 + x_4y_1) + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$;

в) $x_1y_2 + x_2y_1$;

г) $x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2(x_2y_3 + x_3y_2)$.

2.14 Звести до канонічного вигляду кожну з наступних кососиметричних білінійних форм:

а) $x_1y_2 - x_2y_1 + 2(x_1y_3 - x_3y_1) - x_1y_4 + x_4y_1 - 3(x_2y_4 - x_4y_2)$;

б) $x_1y_2 - x_2y_1 + 2(x_1y_3 - x_3y_1) - 2(x_2y_3 - x_3y_2) + 3(x_2y_4 - x_4y_2)$;

в) $x_1y_2 - x_2y_1 + 2(x_1y_3 - x_3y_1) + 4(x_2y_4 - x_4y_2)$;

г) $3(x_1y_3 - x_3y_1) - x_1y_4 + x_4y_1 - 2(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2y_4 - x_4y_2$.

3 Квадратичні функції

Нехай V — векторний простір над полем F і $f : V \times V \to F$ — білінійна функція. Функція $g(x) = f(x, x)$ називається *квадратичною.* Іншими словами, $f : V \to F$ називається *квадратичною*, якщо знайдуться $\{a_{ij}\}_{1 \le i \le j \le n}$ із F, такі, що

$$f(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) = a_{11} x_1^2 + \cdots + a_{nn} x_n^2 + \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j} 2 a_{ij} x_i x_j \qquad (8)$$

для довільного $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \in V$, де $v_1, \ldots, v_n$ — деякий базис простору V.

Вираз у правій частині (8) називається квадратичною формою від змінних $x_1, \ldots, x_n$.

Якщо $g(x)$ — квадратична функція, то існує єдина симетрична білінійна функція

$$f(x, y) = \frac{g(x + y) - g(x) - g(y)}{2}, \qquad (9)$$

яка називається *полярною* до $g(x)$, така, що $g(x) = f(x, x)$. Аналогічно визначається *полярна симетрична білінійна форма* до даної квадратичної форми. Відповідність, яка переводить квадратичну функцію (форму) у полярну до неї симетричну білінійну функцію (відповідно, форму), є бієктивною. Це дозволяє визначити матрицю квадратичної функції у даному базисі як матрицю полярної до неї симетричної білінійної функції у цьому ж базисі, ранг квадратичної функції як ранг полярної до неї білінійної симетричної функції. Те ж саме стосується квадратичних форм.

Дві квадратичні форми $f(x_1, \ldots, x_n)$ та $g(x_1, \ldots, x_n)$ називаються *еквівалентними*, якщо вони відповідають одній й тій самій квадратичній функції у (можливо) різних базисах. Іншими словами, дві квадратичні форми еквівалентні, якщо існує невироджена заміна змінних, яка переводить першу з них у другу. Або, еквівалентно, якщо існує така невироджена матриця C, що матриці A_f і A_g, що відповідають $f(x_1, \ldots, x_n)$ та $g(x_1, \ldots, x_n)$ відповідно, пов'язані співвідношенням

$$A_g = C^t A_f C. \qquad (10)$$

Квадратична форма має *канонічний вигляд*, якщо вона має вигляд $f(x_1, \ldots, x_n) = a_{11} x_1^2 + \cdots + a_{nn} x_n^2$. Дійсна квадратична форма має *нор-*

мальний вигляд, якщо вона має канонічний вигляд причому всі коефіцієнти a_{ii} дорівнюють 1, -1 або 0. Комплексна квадратична форма має *нормальний вигляд*, якщо вона має канонічний вигляд, причому всі коефіцієнти a_{ii} дорівнюють 1 або 0. *Звести квадратичну форму до канонічного (нормального) вигляду* означає знайти еквівалентну до даної квадратичну форму, що має канонічний (відповідно, нормальний) вигляд, а також відповідну невироджену заміну змінних. Еквівалентні квадратичні форми відповідають одній й тій самій квадратичній функції, тому знаходження потрібної невиродженої заміни змінних еквівалентне знаходженню матриці переходу від початкового базису простору до іншого базису, в якому відповідна заданій квадратичній функції квадратична форма має канонічний (або нормальний) вигляд.

Для зведення квадратичної форми до канонічного (чи нормального) вигляду можна користуватись *методом Лагранжа* чи *методом Якобі* (див. приклади 15 і 16).

Додатним (від'ємним) індексом інерції дійсної квадратичної форми $f(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$, *що має канонічний вигляд*, називається кількість додатних (від'ємних) чисел серед $a_{11}, \dots, a_{nn}$. *Додатним (від'ємним) індексом інерції довільної дійсної квадратичної форми* називається додатний (від'ємний) індекс інерції еквівалентної їй квадратичної форми, що має канонічний вигляд. Коректність такого визначення забезпечується тим, що довільну дійсну квадратичну форму можна звести до канонічного вигляду та наступною теоремою.

Теорема 5 (Закон інерції дійсних квадратичних форм). *Додатні (від'ємні) індекси інерції двох еквівалентних дійсних квадратичних форм у канонічному вигляді збігаються.*

Сигнатурою дійсної квадратичної форми називають різницю між її додатним і від'ємним індексами інерції.

Дійсна квадратична форма $f(x_1, \dots, x_n)$ називається *додатно визначеною*, якщо $f(x_1, \dots, x_n) > 0$ для всіх наборів $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$. *Головними кутовими мінорами* матриці $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ називаються визначники матриць $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$, $1 \leq k \leq n$.

Теорема 6 (критерій Сильвестра додатної визначеності дійсної квадратичної форми). *Дійсна квадратична форма є додатно визначеною тоді й лише тоді, коли всі головні кутові мінори її матриці є додатними.*

Приклади розв'язування задач

Приклад 13. *Дано білінійну форму* $f(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_2 + 3x_3y_3$. *Знайти полярну симетричну білінійну форму для квадратичної форми* $f(x, x)$.

Для розв'язання цієї задачі спочатку виписуємо матрицю A білінійної форми $f(x, y)$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Тоді матрицею квадратичної форми $f(x, x)$ буде матриця $B = \frac{1}{2}(A + A^t)$. У нашому випадку $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$. Шукана полярна до $f(x, x)$ симетрична білінійна форма також має матрицю B. Знаючи матрицю, легко виписати відповідну їй білінійну форму: $g(x, y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 3x_2y_2 + \frac{1}{2}x_2y_3 + \frac{1}{2}x_3y_2 + 3x_3y_3$.

Приклад 14. *Не виконуючи обчислень, визначити, чи еквівалентні наступні комплексні квадратичні форми* $f(x) = x_1^2 + 2ix_1x_2 + x_2^2 + 4x_2x_3$ *та* $g(x) = x_1^2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$.

Для комплексних квадратичних форм еквівалентність рівносильна рівності рангів. Запишемо матриці даних квадратичних форм:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \ A_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Оскільки кожна із цих матриць має ранг три, робимо висновок, що дані квадратичні форми еквівалентні.

Приклад 15. *Методом Лагранжа звести квадратичну форму* $f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + x_3^2$ *до канонічного вигляду. Знайти також нормальні вигляди цієї квадратичної форми над* $\mathbb{R}$ *і над* $\mathbb{C}$.

Метод Лагранжа зведення квадратичної форми до канонічного вигляду нагадує відповідний метод зведення симетричної білінійної форми до канонічного вигляду (див. розв'язування приклада 10). Спочатку виконуємо таку заміну змінних, після якої квадратична форма набуде вигляду $\alpha x_1'^2 + g(x_2', x_3')$. Для цього розглянемо всі доданки, що містять

x_1, і доповнимо отриману суму до повного квадрату в наступний спосіб:

$$f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + x_3^2 = \\ (x_1^2 + 2x_1(x_2 + 2x_3) + (x_2 + 2x_3)^2) - (x_2 + 2x_3)^2 + 6x_2x_3 + x_3^2 = \\ (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 - 3x_3^2.$$

Робимо заміну змінних $x_1' = x_1 + x_2 + 2x_3$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$, тобто $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Після цієї заміни змінних квадратична форма набуде вигляду $f(x) = x_1'^2 - x_2'^2 + 2x_2'x_3' - 3x_3'^2$. На другому етапі робимо заміну змінних, після якої квадратична форма набуде вигляду $\alpha x_1''^2 + \beta x_2''^2 + h(x_3'')$. Для цього розглянемо всі доданки, що містять x_2', і доповнимо їх суму до повного квадрату. Отримаємо:

$$f(x) = x_1'^2 - (x_2'^2 - 2x_2'x_3' + x_3'^2) + x_3'^2 - 3x_3'^2 = x_1'^2 - (x_2' - x_3')^2 - 2x_3'^2.$$

Після заміни змінних

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

отримуємо, що $f(x) = x_1''^2 - x_2''^2 - 2x_3''^2$. Отримана квадратична форма має канонічний вигляд.

Зведемо $f(x)$ до нормального вигляду над $\mathbb{R}$. Для цього виконуємо таку заміну змінних, після якої додатні коефіцієнти при квадратах невідомих стають рівними 1, а від'ємні — -1. У нашому випадку $f(x) = x_1''^2 - x_2''^2 - (\sqrt{2}x_3'')^2$, тому виконуємо наступну заміну змінних:

$$\begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Отримуємо $f(x) = x_1'''^2 - x_2'''^2 - x_3'''^2$ — нормальний вигляд над $\mathbb{R}$.

Нарешті, зведемо $f(x)$ до нормального вигляду над $\mathbb{C}$. Для цього виконуємо таку заміну змінних, після всі ненульові коефіцієнти при квадратах невідомих стають рівними 1. Позаяк у нашому випадку $f(x) = x_1''^2 + (ix_2'')^2 + (i\sqrt{2}x_3'')^2$, то виконуємо наступну заміну змінних:

$$\begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Отримуємо $f(x) = x_1'''^2 + x_2'''^2 + x_3'''^2$ — нормальний вигляд над $\mathbb{C}$.

Приклад 16. *Методом Якобі знайти канонічний вигляд квадратичної форми* $f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + x_3^2$.

Спочатку випишемо матрицю $f(x)$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Обчислимо головні кутові мінори Δ_1, Δ_2, Δ_3 матриці A:

$$\Delta_1 = \det(1) = 1; \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1,$$

$$\Delta_3 = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2.$$

Оскільки ми отримали, що Δ_1, Δ_2, Δ_3 ненульові, то можемо виписувати канонічний вигляд $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\Delta_1}y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}y_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2}y_3^2 = y_1^2 - y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2.$$

Зауваження. На відміну від метода Лагранжа, метод Якобі працює не для всіх квадратичних форм (а лише для тих, для яких Δ_1, Δ_2, Δ_3 ненульові). Крім того, метод Якобі не дозволяє знайти заміну змінних, яка зводить квадратичну форму до канонічного вигляду.

Приклад 17. *Знайти всі значення параметра λ, для яких квадратична форма* $5x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + \lambda x_3^2 - 2x_2x_3$ *є додатно визначеною.*

Виписуємо матрицю даної квадратичної форми $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$, після чого обчислюємо головні кутові мінори цієї матриці:

$$\Delta_1 = \det(5) = 5; \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \Delta_3 = \det(A) =$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda - 2.$$

Тому нерівності $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$ виконуються одночасно тоді й лише тоді, коли $\lambda > 2$. Тому внаслідок критерія Сильвестра дана квадратична форма є додатно визначеною тоді й лише тоді, коли $\lambda > 2$.

Задачі

3.1 Задано білінійну форму $f(x, y)$. Знайти полярну симетричну білінійну форму для квадратичної форми $f(x, x)$:

а) $f(x, y) = 4x_1y_1 + 7x_1y_2 + 4x_2y_1 + 3x_2y_2 + +3x_2y_3 + 2x_3y_2$;

б) $f(x, y) = 3x_1y_1 + 5x_1y_2 + 4x_2y_1 - x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_3$.

3.2 Довести, що дві комплексні квадратичні форми еквівалентні тоді й лише тоді, коли їх ранги рівні. Скільки є попарно нееквівалентних комплексних квадратичних форм від n змінних?

3.3 Не виконуючи обчислень, визначити, чи еквівалентні наступні комплексні квадратичні форми $f(x) = x_1^2 + 2ix_1x_2 + x_2^2 + 4x_2x_3$ та $g(x) = x_1^2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$.

3.4 Довести, що дві дійсні квадратичні форми еквівалентні тоді й лише тоді, коли вони мають однакові ранги і сигнатури. Скільки є попарно нееквівалентних дійсних квадратичних форм від n змінних?

3.5 Скільки є попарно нееквівалентних дійсних квадратичних форм від n змінних заданої сигнатури k?

3.6 Довести, що квадратичні форми $x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2$ і $3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ еквівалентні над $\mathbb{R}$, але не еквівалентні над $\mathbb{Q}$.

3.7 Знайти необхідну і достатню умову того, щоб дві квадратичні форми канонічного вигляду із раціональними коефіцієнтими були еквівалентними над $\mathbb{Q}$.

3.8 Методом Лагранжа звести задані квадратичні форми до канонічного вигляду. Знайти нормальні вигляди цих квадратичних форм над $\mathbb{R}$ і над $\mathbb{C}$.

а) $2x_1^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 + 18x_2^2 - 27x_2x_3 + 8x_3^2$;

б) $x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - x_3^2$;

в) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

3.9 Методом Якобі знайти канонічний вигляд квадратичних форм:

а) $2x_1^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 + 18x_2^2 - 27x_2x_3 + 8x_3^2$;

б) $x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - x_3^2$.

3.10 Знайти всі значення параметра λ, для яких квадратична форма f_λ є додатно визначеною:

а) $f_\lambda = 2x_1^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 3x_3^2$;

б) $f_\lambda = x_1^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 4x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2$.

3.11 Довести, що у додатно визначеній квадратичній формі всі коефіцієнти при квадратах змінних є додатними, але ця умова не є достатньою для додатної визначеності форми.

3.12 Знайти додатний і від'ємний індекси інерції квадратичної функції $q(X) = tr(X^2)$ на просторі $M_n(\mathbb{R})$.

4 Геометрія евклідових просторів

Нехай V — дійсний векторний простір. Симетрична білінійна функція $f(x, y)$, $x, y \in V$, називається *додатно визначеною*, якщо $f(x, x) > 0$ для всіх ненульових векторів $x \in V$.

Нехай тепер V — комплексний векторний простір. Функція $f(x, y)$, $x, y \in V$, називається *ермітовою*, якщо вона

- лінійна за першим аргуметном,
- *напівлінійна за другим аргументом*, тобто$f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$ для довільних $x, y_1, y_2 \in V$; $f(x, cy) = \bar{c}f(x, y)$ для довільних $x, y \in V$, $c \in \mathbb{C}$, а також
- *ермітово-симетрична*, тобто $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$ для довільних векторів $x, y \in V$.

Із визначення безпосередньо випливає, що для ермітової функції $f(x, y)$ число $f(x, x)$ є дійсним для довільного $x \in V$. Тому коректним є наступне означення. Ермітова функція $f(x, y)$ на V називається *додатно визначеною*, якщо $f(x, x) > 0$ для всіх ненульових векторів $x \in V$.

Означення 4. Евклідовим простором *називається дійсний векторний простір, на якому задано додатно визначену симетричну білінійну функцію.* Унітарним простором *називається комплексний векторний простір, на якому задано додатно визначену ермітову функцію.*

Вказана в означенні 4 додатно визначена симетрична білінійна функція у випадку дійсного простору чи додатно визначена ермітова функція у випадку комплексного простору називається *скалярним добутком.*

Нехай маємо евклідовий чи унітарний простір $V = (V, (\cdot, \cdot))$. Два вектори $x, y \in V$ називаються *ортогональними*, якщо $(x, y) = 0$. Вектор $v \in V$ називається *ортогональним до підпростору* $L \subset V$, якщо він ортогональний до всіх векторів із L. Множина всіх векторів, ортогональних до підпростору $L \subset V$, є підпростором у V, який називається *орногональним доповненням* до L і позначається $L^{\perp}$. *Нормою (або довжиною)* вектора $x \in V$ називається дійсне число $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Вектор називається *нормованим*, якщо його норма дорівнює 1. У випадку евклідового простору визначено *кут між векорами* x, y: це $arccos \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|}$.

Система векторів $v_1, \ldots, v_n$ називається *ортогональною*, якщо будь-які два різні вектори із цієї системи ортогональні, і *ортонормованою*, якщо вона є орногональною і кожен із векторів системи є нормованим.

Нехай фіксовано вектори $v_1, \ldots, v_n$ евклідового простору V, і $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток. Матриця

$$G(v_1, \ldots, v_n) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & \cdots & (v_1, v_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (v_n, v_1) & \cdots & (v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

називається *матрицею Грама* від векторів $v_1, \ldots, v_n$, а визначник $\Gamma(v_1, \ldots, v_n)$ цієї матриці — *визначником Грама* від векторів $v_1, \ldots, v_n$. Якщо вектори x, y мають у базисі $v_1, \ldots, v_n$ координати $(x_1, \ldots, x_n)$ та $(y_1, \ldots, y_n)$ відповідно, то значення скалярного добутку (x, y) дорівнює

$$f(x, y) = (x_1, \ldots, x_n) \cdot G(v_1, \ldots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

У випадку, коли базис $v_1, \ldots, v_n$ є ортонормованим, матриця Грама, очевидно, є одиничною матрицею, тому формула (12) набуде вигляду

$$(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n. \qquad (13)$$

Для унітарного простору формула вираження скалярного добутку векторів x та y через їх координати $(x_1, \ldots, x_n)$ і $(y_1, \ldots, y_n)$ відповідно у деякому ортонормованому базисі має вигляд

$$(x, y) = x_1 \overline{y_1} + \cdots + x_n \overline{y_n}. \qquad (14)$$

Нехай $v_1, \ldots, v_n$ — лінійно незалежна система векторів. Покладемо $e_1 = v_1$, $e_2 = v_2 - \frac{(v_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1$, і.т.д. Якщо для $2 \leq k \leq n$ вектори $e_1, \ldots e_{k-1}$ вже знайдено, визначаємо

$$e_k = v_k - \frac{(v_k, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 - \cdots - \frac{(v_k, e_{k-1})}{(e_{k-1}, e_{k-1})} e_{k-1}. \qquad (15)$$

Тоді вектори $e_1, \ldots, e_n$ попарно ортогональні і їх лінійна оболонка збігається із лінійною оболонкою початкових векторів $v_1, \ldots, v_n$. Процес переходу від системи векторів $v_1, \ldots, v_n$ до системи векторів $e_1, \ldots, e_n$

називається *процесом ортогоналізації Грама-Шмідта.* Відзначимо, що після застосування до $v_1, \ldots, v_n$ процесу ортогоналізації ми отримаємо вектори, $e_1, \ldots, e_n$, причому $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ і серед векторів $e_1, \ldots, e_n$ є рівно r ненульових, де $r = rank\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Нехай L — підпростір евклідового простору E і $v \in E$. *Ортогональною проекцією вектора v на підпростір L* називається такий вектор $pr_L(v)$, що $pr_L(v) \in L$ і $(v - pr_L(v)) \perp L$, тобто $(v - pr_L(v), x) = 0$ для всіх $x \in L$. Вектор $v - pr_L(v)$ називається *ортогональною складовою* вектора v відносно L і позначається $ort_L(v)$. Для довільних вектора v і підпростору L ортогональна проекція $pr_L(v)$ існує і визначена однозначно за v і L. *Відстанню від v до L* називається норма вектора $ort_L(v)$, *кутом між v та L* — кут між векторами v і $pr_L(v)$.

Алгоритм розв'язування задач на знаходження ортогональної проекції вектора v на підпростір L.

Перший спосіб. Спочатку знаходимо ортогональний базис L за допомогою метода ортогоналізації Грама-Шмідта. На другому етапі використовуємо формулу

$$pr_L(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i, \tag{16}$$

де $e_1, \ldots, e_k$ — ортогональний базис L.

Другий спосіб. Цей спосіб грунтується на наступному спостереженні. Якщо $u = pr_L(v)$, де $L = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, то $(u, v_i) = (v, v_i)$, $1 \le i \le n$. Навпаки, якщо вектор $u \in L$ є таким, що $(u, v_i) = (v, v_i)$, $1 \le i \le n$, то тоді вектор $v - u$ є ортогональним до $v_1, \ldots, v_n$, а отже є ортогональним до L. Тому за визначенням $u = pr_L(v)$.

Будемо шукати $pr_L(v)$ у вигляді

$$pr_L(v) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \tag{17}$$

де коефіцієнти $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ підлягають визначенню.

Домножимо скалярно рівність (17) на кожен із векторів $v_1, \ldots, v_n$. Отримаємо систему із лінійних n рівнянь

$$(v, v_i) = \alpha_1 (v_1, v_i) + \cdots + \alpha_n (v_n, v_i),$$

$1 \le i \le n$. Розв'язавши цю систему рівнянь, знаходимо $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, після чого за формулою (17) знаходимо $pr_L(v)$.

У прикладах і задачах цього розділу, в яких вектори у евклідовому просторі V задано своїми коодинатами в деякому базисі і нічого про цей базис не сказано, ми вважатимемо, що цей базис є *ортонормованим*, зокрема скалярний добуток векторів обчислюється за формулою (13).

Приклади розв'язування задач

Приклад 18. *Перевірити, що вектори* $u = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $u = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ *ортогональні, кожен із них нормований, та доповнити систему векторів* $\{u, v\}$ *до ортонормованого базису.*

Справді, $(u, v) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$ за формулою (13), крім цього $|u| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1$, $|v| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = 1$. Ортогональним доповненням до підпростору, натягнутого на u і v, є простір розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0. \end{cases}$$

ФСР складається із одного вектора $(-2, 2, 1)$. Лишається цей вектор нормувати: отримаємо вектор $\frac{1}{3}(-2, 2, 1)$.

Приклад 19. *Використовуючи метод ортогоналізації Грама-Шмідта, ортогоналізувати систему векторів* $\{v_1, v_2, v_3\}$, *де* $v_1 = (1, 2, 2, -1)$, $v_2 = (1, 1, -5, 3)$, $v_3 = (3, 2, 8, -7)$.

Послідовно будуємо нові вектори e_1, e_2, e_3: $e_1 = v_1 = (1, 2, 2, -1)$, далі

$$e_2 = v_2 - \frac{(v_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 = (1, 1, -5, 3) - \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-5) \cdot 2 + 3 \cdot (-1)}{1^2 + 2^2 + 2^2 + (-1)^2}(1, 2, 2, -1) = (1, 1, -5, 3) + (1, 2, 2, -1) = (2, 3, -3, 2);$$

$$e_3 = v_3 - \frac{(v_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 - \frac{(v_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 = (3, 2, 8, -7) - \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + (-7) \cdot (-1)}{1^2 + 2^2 + 2^2 + (-1)^2}(1, 2, 2, -1) - \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 8 \cdot (-3) + (-7) \cdot 2}{2^2 + 3^2 + (-3)^2 + 2^2}(2, 3, -3, 2) = (3, 2, 8, -7) - 3(1, 2, 2, -1) + (2, 3, -3, 2) = (2, -1, -1, -2).$$

Приклад 20. *Довести, що будь-яку ортонормовану систему векторів евклідового простору можна доповнити до ортонормованого базису.*

Нехай $e_1, \ldots, e_k$ — ортонормована система векторів. Оскільки довільна ортогональна система векторів є лінійно незалежною, до задана система векторів лінійно незалежна. Дововнимо її довільним чином до базису усього простору $e_1, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$. Тепер застосуємо до цього базису процес ортогоналізації, після чого виконаємо нормування усіх отриманих векторів. Отримаємо ортонормовану систему векторів $e_1, \ldots, e_n$, яка, так само, як і $e_1, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$, породжує весь простір. Отже, $e_1, \ldots, e_n$ є ортонормованим базисом.

Приклад 21. *Нехай E — евклідовий простір, і L — підпростір E. Довести, що $E = L \oplus L^{\perp}$.*

Візьмемо довільний ортогональний базис $a_1, \ldots, a_k$ підпростору L, і доповнимо його до ортогонального базису $a_1, \ldots, a_n$ простору E (це можна зробити, див. попередній приклад). Позаяк $a_{k+1} \perp L, \ldots, a_n \perp L$, то $\langle a_{k+1}, \ldots, a_n \rangle \subset L^{\perp}$. Нехай тепер $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \in L^{\perp}$. Оскільки базис $a_1, \ldots, a_n$ — ортогональний, то $(x, a_j) = x_i(a_j, a_j)$, $1 \leq j \leq n$. Звідси, враховуючи, що $x \in L^{\perp}$, випливає, що $x_1 = \cdots = x_k = 0$. Тому $x \in \langle a_{k+1}, \ldots, a_n \rangle$. Таким чином, $L^{\perp} = \langle a_{k+1}, \ldots, a_n \rangle$. Звідси маємо, що $E = L \oplus L^{\perp}$. Більше того, ми довели, що вектори, які доповнюють ортогональний базис L до ортогонального базису E, складають (звичайно, ортогональний) базис $L^{\perp}$.

Приклад 22. *Довести, що для довільного підпростору L евклідового простору E виконується рівність $(L^{\perp})^{\perp} = L$.*

За визначенням, $L^{\perp} = \{y \in E \mid y \perp x \text{ для всіх } x \in L\}$. Тому $x \perp y$ для довільних $x \in L$ і $y \in L^{\perp}$. Знов-таки, за визначенням, $(L^{\perp})^{\perp} = \{z \in E \mid z \perp y \text{ для всіх } y \in L^{\perp}\}$. Отже, якщо $x \in L$, то $x \in (L^{\perp})^{\perp}$. Це тягне включення $L \subset (L^{\perp})^{\perp}$. Для встановлення зворотного включення розглянемо довільний вектор $x \in (L^{\perp})^{\perp}$. За попереднім прикладом існують єдині $y \in L$ і $z \in L^{\perp}$, такі, що $x = y + z$. Помножимо останню рівність скалярно на z: $(x, z) = (y, z) + (z, z)$. Звідси, враховуючи, що $(x, z) = (y, z) = 0$, отримуємо, що $(z, z) = 0$. Тому $z = 0$, звідки $x = y \in L$. Отже, $(L^{\perp})^{\perp} \subset L$. Таким чином, виконується рівність $(L^{\perp})^{\perp} = L$.

Приклад 23. *Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до підпростору L, натягнутого на вектори $a_1 = (1, 0, 2, 1)$, $a_2 = (2, 1, 2, 3)$, $a_3 = (0, 1, -2, 1)$.*

Для того, щоб вектор x належав до $L^\perp$ необхідно і достатньо, щоб x був ортогональним до всіх векторів деякої системи твірних L. Тому $x \in L^\perp \iff (x, a_1) = (x, a_2) = 0$. Нехай $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in L^\perp$. Перепишемо останні рівності, виразивши скалярний добуток через координати векторів за формулою (13): $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$ Отже, $L^\perp$ збігається із простором розв'язків отриманої однорідної системи рівнянь, а базис $L^\perp$ — це ФСР цієї системи. Знайдемо ФСР, виконавши спочатку перетворення над матрицею системи:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ФСР містить два вектори: $b_1 = (-2, 2, 1, 0)$ і $b_2 = (-1, -1, 0, 1)$. Ці вектори і складають базис $L^\perp$.

Приклад 24. *Знайти базис ортогонального доповнення $L^\perp$ до підпростору L, заданого системою лінійних рівнянь* $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

Перший спосіб. Дану задачу можна легко звести до попередньої: знайшовши ФСР заданої системи рівнянь, ми отримаємо базис L, і задача полягатиме у знаходженні базису $L^\perp$ при відомому базисі L. Як це зробити сказано у розв'язанні попереднього прикладу.

Другий спосіб. Розглянемо вектори $a_1 = (2, 1, 3, -1)$, $a_2 = (3, 2, 0, -2)$, утворені коефіцієнтами рівнянь заданої системи лінійних рівнянь. Вектор x є розв'язком даної системи рівнянь тоді й лише тоді, коли $(x, a_1) = (x, a_2) = 0$. Тому $x \in L \iff (x, a_1) = (x, a_2) = 0$. Але дві останні рівності еквівалентні тому, що $x \perp \langle a_1, a_2 \rangle$. Таким чином, $x \in L \iff x \perp \langle a_1, a_2 \rangle$. Звідси за визначенням ортогонального доповнення отримуємо, що $L = (\langle a_1, a_2 \rangle)^\perp$. Звідси випливає (див. приклад 22), що $L^\perp = \langle a_1, a_2 \rangle$. Оскільки вектори a_1, a_2 лінійно незалежні, то a_1, a_2 утворюють базис $L^\perp$.

Приклад 25. *Довести, що задання підпростору L простору $\mathbb{R}^n$ та його ортогонального доповнення $L^\perp$ пов'язані в наступний спосіб: коефіцієнти лінійно незалежної системи лінійних рівнянь, що задає один із цих підпросторів, є координатами векторів базису іншого підпростору.*

Оскільки $(L^{\perp})^{\perp} = L$ (приклад 22), то достатньо довести, що коефіцієнти лінійно незалежної системи, що задає L, є координатами векторів базису $L^{\perp}$. Нехай $a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n})$, $\ldots$, $a_k = (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ — вектори із коефіцієнтів рівнянь системи рівнянь, що задає L. Тоді $x \in L \iff (x, a_1) = \cdots = (x, a_k) = 0$. Остання система рівностей еквівалентна тому, що $x \perp \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$. Звідси за визначенням ортогонального доповнення отримуємо, що $L = (\langle a_1, \ldots, a_k \rangle)^{\perp}$. Звідси із урахуванням прикладу 22 отримуємо, що $L^{\perp} = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$. Оскільки до того ж $a_1, \ldots, a_k$ — лінійно незалежні за умовою, то вони складають базис $L^{\perp}$.

Приклад 26. *Знайти отогональну проекцію вектора $v = (-10, -8, 17, 2)$ на підпростір L, заданий системою лінійних рівнянь*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

Також знайти ортогональну складову і відстань від v до L.

Знайдемо спочатку базис L — ФСР даної системи рівнянь: це вектори $u_1 = (1, 1, 3, 0)$ і $u_2 = (-5, -2, 0, 3)$. Ортогоналізуючи отримані вектори методом Грама-Шмідта, отримаємо вектори $v_1 = (1, 1, 3, 0)$ і $v_2' = (-\frac{48}{11}, -\frac{15}{11}, \frac{21}{11}, 3)$. Покладемо $v_2 = \frac{11}{3} v_2' = (-16, -5, 7, 1)$. Оскільки v_1, v_2 утворюють ортогональний базис L, то за формулою (16) знаходимо

$$pr_L(v) = \frac{(v, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 + \frac{(v, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 = \frac{33}{11} v_1 + \frac{331}{331} v_2 =$$
$$(3, 3, 9, 0) + (-16, -5, 7, 1) = (-13, -2, 16, 1).$$

Далі, $ort_L(v) = v - pr_L(v) = (-10, -8, 17, 2) - (-13, -2, 16, 1) = (3, -6, 1, 1)$. Відстань від v до L дорівнює $|ort_L(v)| = \sqrt{47}$.

Приклад 27. *Довести, що визначник Грама $\Gamma(a_1, \ldots, a_k)$ не змінюється, якщо до векторів $a_1, \ldots, a_k$ застосувати процес ортогоналізації. Зокрема, якщо після завершення процесу ортогоналізації вектори $a_1, \ldots, a_k$ перейдуть у вектори $b_1, \ldots, b_k$, то*

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_k) = \Gamma(b_1, \ldots, b_k) = (b_1, b_1) \cdots (b_k, b_k).$$

Очевидно, на першому етапі процесу ортогоналізації визначник Грама не зміниться, бо $b_1 = a_1$. Припустимо, що $1 \leq t \leq k - 1$ і

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_k) = \Gamma(b_1, \ldots, b_t, a_{t+1}, \ldots, a_k),$$

де вектори $b_1, \ldots, b_t$ попарно ортогональні. За формулою (15) знаходимо, що вектор

$$b_{t+1} = a_{t+1} - \lambda_1 b_1 - \cdots - \lambda_t b_t,$$

де $\lambda_i = \frac{(a_{t+1}, b_i)}{(b_i, b_i)}$, $1 \leq i \leq t$, є ортогональним до кожного з $b_1, \ldots, b_t$.

Додамо до $(t+1)$-го стовпчика визначника $\Gamma(b_1, \ldots, b_t, a_{t+1}, \ldots, a_k)$ перший стовпчик, помножений на λ_1, і.т.д., t-ий стовпчик, помножений на λ_t. Після цього здійснимо аналогічні перетворення над рядками отриманого визначника. Із лінійності скалярного добутку за кожним з аргументів випливає, що в результаті отримаємо визначник $\Gamma(b_1, \ldots, b_t, b_{t+1}, a_{t+2} \ldots, a_k)$. Оскільки виконані елементарні перетворення не змінюють значення визначника, то

$$\Gamma(b_1, \ldots, b_t, b_{t+1}, a_{t+2} \ldots, a_k) = \Gamma(b_1, \ldots, b_t, a_{t+1}, \ldots, a_k).$$

Це завершує доведення.

Приклад 28. *Довести, що матриця Грама G довільної лінійно незалежної системи векторів $a_1, \ldots, a_k$ подається у вигляді $G = C^t C$ для деякої невиродженої матриці C.*

Оскільки скалярний добуток за означенням є додатно визначеною симетричною білінійною функцією, то нормальний вигляд (як білінійної форми) заданого скалярного добутку має одиничну матрицю E. Нехай D — матриця зміни координат, яка приводить заданий скалярний добуток до нормального вигляду, і $C = D^{-1}$. Тоді за формулою (4) $G = (C^{-1})^t E C^{-1} = D^t D$.

Приклад 29. *Нехай $a_1, \ldots, a_k$ — вектори евклідового простору, L — деякий k-вимірний підпростір, що містить $a_1, \ldots, a_k$, і $e_1, \ldots, e_k$ — ортонормований базис L. Довести, що $\Gamma(a_1, \ldots, a_k)$ дорівнює квадрату визначника матриці M, i-ий рядок якої є рядком координат вектора a_i у базисі $e_1, \ldots, e_k$, $1 \leq i \leq k$.*

Нехай $a_i = \alpha_{i1} e_1 + \cdots + \alpha_{ik} e_k$, $1 \leq i \leq k$. За формулою (13) для довільних $1 \leq i, j \leq k$ маємо:

$$(a_i, a_j) = \alpha_{i1}\alpha_{j1} + \cdots + \alpha_{ik}\alpha_{jk},$$

що дорівнює добутку i-го рядка матриці M на j-ий рядок тієї ж матриці, тобто добутку i-го рядка матриці M на j-ий стовпчик матриці

M^t. Отже, матриця Грама векторів $a_1, \dots, a_k$ дорівнює матриці MM^t, звідки

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) = \det(MM^t) = \det(M)\det(M^t) = (\det(M))^2.$$

Приклад 30. *Задано несумісну систему лінійних рівнянь*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Позначимо через a_1, a_2, a_3 — стовпчики коефіцієнтів при змінних x_1, x_2, x_3 відповідно, і через b — стовпчик вільних членів. Несумісність даної системи еквівалентна тому, що $b \notin L$, де $L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Знайти вектор $b_1 \in L$, такий, що $|b_1 - b| = min_{c \in L}|c - b|$, і розв'язати систему лінійних рівнянь (яка напевно є сумісною), отриману із початкової заміною стовпчика вільних членів b на b_1.

Спочатку покажемо, що існує єдиний вектор $b_1 \in L$, який задовольняє умову $|b_1 - b| = min_{c \in L}|c - b|$, і цей вектор збігається із $pr_L(b)$. Нехай $c \in L$. Тоді

$$b - c = (b - b_1) + (b_1 - c) = ort_L(b) + (b_1 - c). \tag{18}$$

Оскільки $ort_L(b) \perp b_1$ і $ort_L(b) \perp c$, то $ort_L(b) \perp b_1 - c$, тому до (18) можна застосувати теорему Піфагора, згідно якої $|b - c|^2 = |ort_L(b)|^2 + |b_1 - c|^2$, звідки $|b - c| \geq |ort_L(b)|$, причому рівність досягається тоді й лише тоді, коли $b_1 = c$.

Отже, для того, щоб розв'язати задачу, треба знайти ортогональну проекцію вектора b на підпростір L (див. приклад 26), після чого розв'язати систему лінійних рівнянь, отриману із початкової заміною b на знайдений вектор b_1. Розв'язком отриманої системи буде набір із координат вектора $pr_L(b)$ у базисі a_1, a_2, a_3 (вектори a_1, a_2, a_3, у чому легко пересвідчитись, є лінійно незалежними) простору L.

Скористаємося другим алгоритмом знаходження ортогональної проекції вектора на підпростір (див. початок цього розділу). Домноживши рівність $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b_1$ скалярно на кожен із векторів a_1, a_2, a_3, отримаємо систему із трьох рівнянь:

$$\begin{cases} (a_1, a_1)x_1 + (a_1, a_2)x_2 + (a_1, a_3)x_3 = (a_1, b_1), \\ (a_2, a_1)x_1 + (a_2, a_2)x_2 + (a_2, a_3)x_3 = (a_2, b_1), \\ (a_3, a_1)x_1 + (a_3, a_2)x_2 + (a_3, a_3)x_3 = (a_3, b_1). \end{cases}$$

Зауважимо, що $(a_i, b_1) = (a_i, b - ort_L(b)) = (a_i, b) - (a_i, ort_L(b)) = (a_i, b)$, $i = 1, 2, 3$. Обчислюємо $(a_1, b) = 5$, $(a_2, b) = 5$, $(a_3, b) = 1$. Остання система рівнянь запишеться так:

$$G(a_1, a_2, a_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

де $G(a_1, a_2, a_3)$ — матриця Грама векторів a_1, a_2, a_3, звідки, беручи до уваги невиродженість $G(a_1, a_2, a_3)$, знаходимо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (G(a_1, a_2, a_3))^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{112} \begin{pmatrix} 61 & -48 & 3 \\ -48 & 80 & 16 \\ 3 & 16 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{112} \begin{pmatrix} 68 \\ 176 \\ 108 \end{pmatrix} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 17 \\ 44 \\ 27 \end{pmatrix}.$$

Приклад 31. *n-вимірний куб із ребром a — це множина $K_n(a) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \leq a, i = 1, \ldots, n\}$. Вершинами $K_n(a)$ назвемо вектори, серед координат яких зустрічаються лише 0 і a. Дві вершини називаються протилежними, якщо для кожного $i = 1, \ldots n$ i-ті координати цих вершин різні. Діагоналлю $K_n(a)$ називається довільний вектор вигляду $(a, c_2, \ldots, c_n)$, де c_i дорівнює a або $(-a)$ для $i = 2, \ldots, n$. Знайти кількість діагоналей $K_n(a)$, ортогональних до даної діагоналі.*

Нехай $d = (a, c_2, \ldots, c_n)$ — діагональ $K_n(a)$. Без обмеження загальності можна вважати, що $d = (a, a, \ldots, a)$. Якщо $d_1 = (a, c'_2, \ldots, c'_n)$ — інша діагональ, то скалярний добуток (d, d_1) є сумою n доданків, кожен з яких дорівнює $(-a^2)$ або a^2. Для того, щоб $(d, d_1) = 0$ необхідно і достатньо, щоб кількості від'ємних і додатних доданків збігалися, зокрема, необхідно, шоб n було парним. Тобто, якщо n — непарне, то жодна діагональ не є ортогональною до даної. Припустимо тепер, що $n = 2k$. Для того, щоб задати діагональ d_1, ортогональну до d, потрібно задати вектор, який має k координат (включаючи першу), рівних a, і k координат, рівних $(-a)$. Отже, спочатку обираємо $(k-1)$-елементну підмножину множини $\{2, \ldots, n\}$ — це номери координат вектора d_1, на яких, так само, як і на першій координаті, стоять a. Такий вибір можна здійснити $\binom{n-1}{k-1}$ способами. Після цього кожну з k координат вектора d_1, що не входять до обраної множини, заповнюємо числами $(-a)$. Таким чином, в цьому випадку кількість діагоналей, ортогональних до даної, дорівнює $\binom{n-1}{k-1}$.

Зауваження. Легко бачити, що діагоналі знаходяться у бієктивній відповідності із невпорядкованими парами протилежних вершин, що цілком узгоджується із нашою інтуїцією. Однак, якщо визначити ребра аналогічним чином як вектори $v-u$, де v, u суміжні вершини, причому $v-u$ і $u-v$ задають одне і те саме ребро, ми отримаємо, що $K_n(a)$ має n ребер (зокрема, квадрат має 2, а не 4, ребра), якщо ж визначити ребро як невпорядковану пару вершин, то ми отримаємо $n2^{n-1}$ ребер. Річ у тім, що перше означення не розрізняє колінеарні ребра, що не узгоджується із нашою інтуїцією, прив'язаною скоріше до афінного простору, ніж до евклідового.

Задачі

4.1 Довести, що для того, щоб додатно визначена функція $f(x,y)$ на $\mathbb{R}^n$ була скалярним добутком, достатньо вимагати лінійність за одним із аргуметнів і симетричність.

4.2 Довести, що для того, щоб додатно визначена функція $f(x,y)$ на $\mathbb{C}^n$ була скалярним добутком, достатньо вимагати лінійність за першим аргументом (чи напівлінійність за другим аргументом) і симетричність.

4.3 Нехай L_1, L_2 — лінійні підпростори евклідового (чи унітарного) простору V, причому розмірність L_1 менше, ніж розмірність L_2. Довести, що існує ненульовий вектор $v \in L_2$, ортогональний до всіх векторів із L_1.

4.4 Перевірити, що вектори наступних систем попарно ортогональні та доповнити їх до ортогональних базисів:

а) $(1,-2,2,-3)^t,\ (2,-3,2,4)^t$;

б) $(1,1,1,-2)^t,\ (1,2,3,-3)^t$.

4.5 Знайти вектори, що доповнюють систему векторів $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ до ортонормованого базису.

4.6 Нехай L_1, L_2 — підпростори евклідового простору $\mathbb{R}^n$. Довести, що

а) $(L_1+L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$;

б) $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$;

в) $(\mathbb{R}^n)^\perp = 0$; $\quad 0^\perp = \mathbb{R}^n$.

4.7 Знайти базис ортогонального доповнення $L^\perp$ до підпростору L, натягнутого на вектори

а) $a_1 = (3, -1, 2, 4)$, $a_2 = (1, 0, 2, 1)$;

б) $a_1 = (1, 1, -2, -3)$, $a_2 = (0, 1, 1, 1)$, $a_3 = (1, 2, 1, 4)$.

4.8 Для підпростору, заданого кожною із наступних систем рівнянь знайти базис ортогонального доповнення і систему рівнянь, що задають ортогональне доповнення:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

4.9 Використовуючи метод ортогоналізації Грама-Шмідта, ортогоналізувати систему векторів $\{v_1, v_2, v_3\}$, якщо

а) $v_1 = (3, 1, 4, -1)$, $v_2 = (2, 5, 3, -4)$, $v_3 = (-4, 4, -7, 18)$;

б) $v_1 = (1, 1, -1, -2)$, $v_2 = (5, 8, -2, -3)$, $v_3 = (3, 9, 3, 8)$.

4.10 Нехай x та L — відповідно вектор і підпростір у евклідовому просторі. Довести, що

а) $ort_L(x) = x$ тоді й лише тоді, коли $x \in L$;

б) $ort_L(x) = 0$ тоді й лише тоді, коли $x \perp L$.

4.11 Нехай процес ортогоналізації переводить вектори $a_1, \dots, a_k$ у вектори $b_1, \dots, b_k$. Довести, що

а) $b_t = ort_{L_{t-1}}(a_t)$, де $L_{t-1} = \langle a_1, \dots, a_{t-1} \rangle$, $2 \le t \le k$;

б) $0 \le |b_t| \le |a_t|$, $1 \le t \le k$;

в) $b_t = 0$ тоді й лише тоді, коли $t = 1$ і $a_1 = 0$ або $t > 1$ і $a_t \in \langle a_1, \dots, a_{t-1} \rangle$;

г) $|b_t| = |a_t|$ тоді й лише тоді, коли $t = 1$ або $t > 1$ і $a_t \perp L_{t-1}$.

4.12 Знайти отогональну проекцію вектора x на підпростір L, ортогональну складову, відстань від x до L і кут між x та L, якщо

а) $x = (4, -1, -3, 4)$, $L = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3) \rangle$;

б) $x = (7, -4, -1, 2)$, L задано системою рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

4.13 Нехай $v_1, \dots v_n$ — базис підпростору L евклідового простору E, і $x \in E$. Довести, що рівність $pr_L(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x,v_i)}{(v_i,v_i)} v_i$ виконується тоді й лише тоді, коли або $x \perp L$, або ж $v_1, \dots, v_n$ — ортогональний базис L.

4.14 Нехай $\{e_1, \dots, e_k\}$ — ортонормована система векторів евклідового простору $\mathbb{R}^n$. Довести, що

а) для довільного вектора $x \in \mathbb{R}^n$ виконується нерівність (*нерівність Бесселя*)

$$\sum_{i=1}^{k} (x, e_i)^2 \leq |x|^2; \tag{19}$$

б) нерівність (19) перетворюється на рівність (*рівність Парсеваля*) для довільного $x \in \mathbb{R}^n$ тоді й лише тоді, коли $k = n$, тобто коли $e_1, \dots, e_k$ є ортонормованим базисом $\mathbb{R}^n$.

4.15 Довести, що для лінійної залежності векторів $a_1, \dots, a_k$ евклідового простору необхідно і достатньо, щоб $\Gamma(a_1, \dots, a_k) = 0$.

4.16 Довести, що $\Gamma(a_1, \dots, a_k) > 0$, якщо вектори $a_1, \dots, a_k$ лінійно незалежні.

4.17 Довести, що квадрат відстані від вектора x евклідового простору до підпростору із базисом $e_1, \dots, e_k$ дорівнює

$$\frac{\Gamma(e_1, \dots, e_k, x)}{\Gamma(e_1, \dots, e_k)}.$$

4.18 Визначимо об'єм $V(v_1, \dots, v_n)$ n-вимірного паралелепіпеда, натягнутого на лінійно незалежні вектори $v_1, \dots, v_n$ індуктивно в наступний спосіб. Для $n = 1$ покладемо $V(v_1) = |v_1|$. Нехай $n > 1$. Покладемо $V(v_1, \dots, v_n) = V(v_1, \dots, v_{n-1}) \cdot d(v_n, \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle)$, де $d(v_n, \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle)$ — відстань від v_n до $\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$. Довести, що

$$V(v_1, \dots, v_n) = \sqrt{\Gamma(v_1, \dots, v_n)} = |D|,$$

де D — визначник із координат даних векторів в деякому ортонормованому базисі n-вимірного простору $\langle v_1 \dots v_n \rangle$.

4.19 Задано несумісну систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x - 4 = 1, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

Позначимо через a_1, a_2, a_3 — стовпчики коефіцієнтів при змінних x_1, x_2, x_3 відповідно і через b — стовпчик вільних членів. Несумісність даної системи еквівалентна тому, що $b \notin L$, де $L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Знайти вектор $b_1 \in L$, такий, що $|b_1 - b| = min_{c \in L}|c - b|$, і розв'язати систему лінійних рівнянь (яка напевно є сумісною), отриману із початкової заміною стовпчика вільних членів b на b_1.

4.20 Знайти довжину діагоналі n-вимірного куба з ребром a і границю цієї довжини при $n \to \infty$.

4.21 Довести, що всі діагоналі n-вимірного куба утворюють один й той самий кут з усіма його ребрами. Знайти цей кут та його границю при $n \to \infty$. При якому n отримаємо кут $60°$?

4.22 Знайти радіус $R(a)$ кулі, описаної навколо n-вимірного куба з ребром a. В залежності від n розв'язати нерівність $R(a) > a$.

4.23 Довести, що ортогональна проекція довільного ребра n-вимірного куба на довільну діагональ цього куба за абсолютною величиною дорівнює $\frac{1}{n}$ довжини діагоналі.

5 Спряжений оператор, ортогональні та унітарні оператори.

Нехай $E = (E, (\cdot, \cdot))$ — деякий евклідовий чи унітарний простір і φ — лінійний оператор у просторі E.

Означення 5. *Лінійний оператор φ^* у (евклідовому чи унітарному) просторі E називається* спряженим *до φ якщо $(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$ для довільних $x, y \in E$.*

Відомо, що для будь-якого φ спряжений оператор φ^* існує і єдиний. Нехай $v_1, \ldots, v_n$ — ортонормований базис простору E. Матриці A_φ і A_{φ^*} операторів φ і φ^* у базисі $v_1, \ldots, v_n$ пов'язані співвідношенням $A_{\varphi^*} = A_\varphi^t$, або у випадку унітарного простору $A_{\varphi^*} = \overline{A_\varphi^t}$, де через $\overline{M}$ позначається матриця, отримана із комплексної матриці M заміною кожного елемента на комплексно спряжений.

Означення 6. *Нехай $E = (E, (\cdot, \cdot))$ — евклідовий (унітарний) простір Лінійний оператор φ, що діє в просторі E, називається* ортогональним *(*унітарним *у випадку унітарного простору), якщо для довільних $x, y \in E$ виконується рівність*

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y). \tag{20}$$

Формула (20) означає, що ортогональні (унітарні) оператори — це в точності ті оператори, які зберігають скалярний добуток. Безпосередньо із визначення випливає, що ортогональний (унітарний) оператор переводить ортонормований базис у ортонормований базис, зокрема, є невиродженим. Справедливим є і зворотне твердження: якщо дійсний (комплексний) лінійний оператор переводить якийсь ортонормований базис у ортонормований базис, то цей оператор є ортогональним (унітарним). У наступній теоремі наводиться важлива характеризація ортогональних (унітарних) операторів.

Теорема 7. *Нехай φ — лінійний оператор у евклідовому (унітарному) просторі E. Наступні умови еквівалентні:*

- *φ є ортогональним (унітарним);*
- *$\varphi^{-1} = \varphi^*$;*
- *$\varphi\varphi^*$, $\varphi^*\varphi$ є тотожними операторами.*

Ортогональні та унітарні оператори належать до більш широкого класу операторів — класу нормальних операторів. *Нормальним* називається лінійний оператор у евклідовому чи унітарному просторі, для якого виконується рівність $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$.

Для нормального оператора будь-які два його власних вектори із різними власними числами є ортогональними. Однією із основних властивостей нормальних операторів в унітарному просторі є існування ортонормованих власних базисів.

Комплексна матриця M називається *унітарною*, якщо $\overline{M^t} = M^{-1}$. Дійсна матриця M називається *ортогональною*, якщо $M^t = M^{-1}$.

Теорема 8. *Матриця ортогонального (унітарного) оператора у довільному ортонормованому базисі є ортогональною (унітарною). Навпаки, якщо матриця лінійного оператора в деякому ортогональному базисі є ортогональною (унітарною), то цей лінійний оператор є ортогональним (унітарним).*

Наступні дві теореми є теоремами про канонічний вигляд унітарних та ортогональних операторів та матриць.

Теорема 9.

1. *Для довільного унітарного оператора φ унітарного простору E існує ортонормований базис із власних векторів оператора φ. У цьому базисі матриця φ має канонічний вигляд, тобто є діагональною із діагональними елементами, за модулем рівними одиниці.*

2. *Для довільної унітарної матриці A існують унітарна матриця C та діагональна матриця B із діагональними елементами, за модулем рівними одиниці, такі, що $B = C^{-1}AC$.*

Теорема 10.

1. *Для довільного орогонального оператора φ евклідового простору E існує ортонормований базис, в якому матриця φ має канонічний вигляд, тобто є прямою сумою клітин розміру 2×2 вигляду $\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$, $\gamma \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, і клітин 1×1, рівних (1) або (-1).*

2. *Для довільної ортогональної матриці A існують ортогональна матриця C та матриця B, що має канонічний вигляд (визначений у попередньому пункті), такі, що $B = C^{-1}AC$.*

Алгоритм зведення унітарної матриці до канонічного вигляду. Задано комплексну унітарну матрицю A. Знайти діагональну матрицю B із діагональними елементами, рівними за модулем 1, і унітарну матрицю C — матрицю переходу — такі, що $B = C^{-1}AC$.

1. Знаходимо власні числа матриці A, розв'язавши рівняння $\chi_A(x) = 0$, де $\chi_A(x)$ — характеристичний многочлен матриці A. Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ — власні числа A кратностей відповідно $k_1, \ldots, k_t$, де $k_1 + \cdots + k_t = n$, де n — порядок матриці A (власні числа виписуємо у довільному порядку). Відзначимо, що модуль кожного із λ_i повинен бути одиничним.

2. Матрицю B — канонічний вигляд матриці A — виписуємо таким чином: B — діагональна матриця порядку n, причому перші k_1 діагональних елементів дорівнюють λ_1, і.т.д., останні k_t діагональних елементів дорівнюють λ_t.

3. Знаходимо базис $v_1, \ldots, v_{k_1}$ власного підпростору V_{λ_1}, який відповідає власному числу λ_1. Для цього знаходимо ФСР однорідної системи лінійних рівнянь із матрицею $A - \lambda_1 E_n$, де E_n позначає одиничну матрицю $n \times n$. Відзначимо, що повинна виконуватись рівність $\dim(V_{\lambda_1}) = k_1$. Застосовуючи у разі потреби процес ортогоналізації до векторів $v_1, \ldots, v_{k_1}$, знаходимо ортогональний базис V_{λ_1}. Поділивши кожен вектор знайденого ортогонального базису на його норму, отримаємо ортонормований базис $e_1^1, \ldots e_{k_1}^1$ простору V_{λ_1}.

4. Для власних підпросторів $V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_t}$ так само, як у попередньому пункті для V_{λ_1}, знаходимо ортонормовані базиси $e_1^2, \ldots e_{k_2}^2$, $\ldots$, $e_1^t, \ldots e_{k_t}^t$.

5. Тепер виписуємо матрицю переходу C: це матриця $n \times n$, стовпчиками якої (зліва направо) є координати векторів
$$e_1^1, \ldots e_{k_1}^1,\ e_1^2, \ldots e_{k_2}^2\ \ \ldots,\ e_1^t, \ldots e_{k_t}^t.$$

Алгоритм зведення ортогональної матриці до канонічного вигляду. Задано дійсну ортогональну матрицю A. Знайти матрицю B, що має канонічний вигляд (див. теорему 10), і ортогональну матрицю C — матрицю переходу — такі, що $B = C^{-1}AC$.

1. Знаходимо всі комплексні власні числа матриці A, розв'язавши рівняння $\chi_A(x) = 0$, де $\chi_A(x)$ — характеристичний многочлен матриці A. Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — дійсні власні числа A (кожне із них повинно дорівнювати 1 або -1) і $k_1, \ldots, k_s$ відповідно їх кратності. Нехай, далі,

$$\delta_j = \cos\gamma_j + i\sin\gamma_j,\ \delta'_j = \cos\gamma_j - i\sin\gamma_j,\ \gamma_j \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z},$$

$1 \leq j \leq t$, — недійсні власні числа, причому l_1 — кратність δ_1 і δ'_1, $\ldots$, l_t — кратність δ_t і δ'_t.

2. Матрицю B — канонічний вигляд матриці A — виписуємо таким чином: B — пряма сума клітин: k_1 клітин (λ_1), потім k_2 клітин (λ_2), і.т.д., k_s клітин $\ldots, (\lambda_s)$; наступні l_1 клітин $\begin{pmatrix} \cos\gamma_1 & \sin\gamma_1 \\ -\sin\gamma_1 & \cos\gamma_1 \end{pmatrix}$, і.т.д., останні l_t клітин $\begin{pmatrix} \cos\gamma_t & \sin\gamma_t \\ -\sin\gamma_t & \cos\gamma_t \end{pmatrix}$.

3. Для знаходження перших $k_1+\cdots+k_s$ стовпчиків матриці переходу (які відповідають дійсним власним числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ матриці A) використовуємо кроки 3 і 4 попереднього алгоритму.

4. Нехай $u_1^1 + iv_1^1, \ldots, u_{l_1}^1 + iv_{l_1}^1$ — попарно ортогональні лінійно незалежні власні вектори, що відповідають δ_1, і.т.д., $u_1^t + iv_1^t, \ldots, u_{l_t}^t + iv_{l_t}^t$ — попарно ортогональні лінійно незалежні власні вектори, що відповідають δ_{l_t}. Продовжуємо виписувати стовпчики матриці переходу таким чином:

$$\frac{u_1^1}{|u_1^1|}, \frac{v_1^1}{|v_1^1|}, \ \ldots, \ \frac{u_{l_1}^1}{|u_{l_1}^1|}, \frac{v_{l_1}^1}{|v_{l_1}^1|}; \ \ldots; \ \frac{u_1^t}{|u_1^t|}, \frac{v_1^t}{|v_1^t|}, \ \ldots, \ \frac{u_{l_t}^t}{|u_{l_t}^t|}, \frac{v_{l_t}^t}{|v_{l_t}^t|}.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 32. *Нехай φ, ψ — лінійні оператори, що діють у евклідовому (чи унітарному) просторі. Довести, що $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$.*

Із визначення спряженого оператора випливає такий ланцюг співвідношень:

$$((\varphi\psi)(x), y) = (\varphi(\psi(x)), y) = (\psi(x), \varphi^*(y)) = \\ (x, \psi^*(\varphi^*(y))) = (x, (\psi^*\varphi^*)(y)).$$

Таким чином, $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$.

Приклад 33. *Нехай e_1, e_2 — ортонормований базис простору $\mathbb{R}^2$ і лінійний оператор φ у базисі $f_1 = e_1, f_2 = e_1 + e_2$ має матрицю $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю спряженого оператора φ^* у тому ж базисі f_1, f_2.*

Запишемо матрицю переходу від базису e_1, e_2 до базису $f_1, f_2 : C = C_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Знаходимо одразу й обернену до неї матрицю $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Матриця C^{-1} — це матриця $C_{f\to e}$ переходу від f_1, f_2 до e_1, e_2. Використовуючи формулу зміни матриці лінійного оператора при зміні базису, знаходимо, що матриця A_e оператора φ у базисі e_1, e_2 дорівнює

$$A_e = C^{-1}_{f\to e} A_f C_{f\to e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тепер, для того, щоб знайти матрицю B_e оперетора φ^* у базисі e_1, e_2, ми просто транспонуємо матрицю A_e: $B_e = A_e^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Нарешті, щоб знайти B_f, знову використовуємо формулу зміни матриці лінійного оператора при зміні базису:

$$B_f = C^{-1}_{e\to f} B_e C_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 34. *Нехай $x_1, \ldots, x_k$; $y_1, \ldots, y_k$ — вектори евклідового простору. Довести, що для існування ортогонального лінійного оператора, такого, що $\varphi(x_i) = y_i$, $1 \le i \le k$, необхідно і достатньо, щоб матриці Грама $G(x_1, \ldots, x_k)$ і $G(y_1, \ldots, y_k)$ були рівними.*

Необхідність твердження випливає безпосередньо із визначення ортогонального оператора і матриці Грама. Для доведення достатності скористаємось індукцією за кількістю векторів k. Якщо $k = 1$, то твердження очевидне. Припустимо, що $k \ge 2$ і $G(x_1, \ldots, x_k) = G(y_1, \ldots, y_k)$. Припустимо також, що існує ортогональний оператор φ, для якого $\varphi(x_i) = y_i$, $1 \le i \le k-1$. Побудуємо новий ортогональний оператор ψ, такий, що $\psi(x_i) = \varphi(x_i)$, $1 \le i \le k-1$ і $\psi(x_k) = y_k$.

Покладемо $L = \langle x_1, \ldots, x_{k-1} \rangle$. Розглянемо вектор $x'_k = ort_L(x_k) = x_k - pr_L(x_k) = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i$ для деяких коефіцієнтів $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$.

Покладемо також $L' = \langle y_1, \dots, y_{k-1} \rangle$ і $y'_k = y_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i y_i$. Для $1 \le t \le k$ маємо

$$(y'_k, y_t) = (y_k, y_t) - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (y_i, y_t) = (x_k, x_t) - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (x_i, x_t) = (x'_k, x_t),$$

звідки $y'_k = ort_{L'}(y_k)$, $pr_{L'}(y_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i y_i = \varphi(pr_L(x_k))$ і якщо $x'_k = 0$, то $y'_k = 0$, тобто із включення $x_k \in L$ випливає включення $y_k \in L'$. Аналогічно можна показати, що $y_k \in L'$ тягне $x_k \in L$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $x_k \in L$, тобто $x_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i$ і $x'_k = 0$. Тоді

$$\varphi(x_k) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i y_i = y_k - y'_k = y_k.$$

Отже, в цьому випадку достатньо покласти $\psi = \varphi$.

Нехай тепер $x_k \notin L$. Тоді і $y_k \notin L'$. Нехай $\beta = |x'_k| = |y'_k|$, $x''_k = \frac{x'_k}{\beta}$, $y''_k = \frac{y'_k}{\beta}$. Із припущення індукції і невиродженості ортогональних операторів випливає, що $\dim(L) = \dim(L')$. Виберемо довільний ортонормований базис $a_1, \dots, a_s$ підпростору L. Оскільки φ — ортогональний оператор, то вектори $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_s)$ складають ортонормований базис L'. За побудовою, системи векторів $a_1, \dots, a_s, x''_k$ і $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_s), y''_k$ є ортонормованими. Доповнивши кожну із них довільним чином до ортонормованого базису простору (див. приклад 20), отримаємо два ортонормованих базиси $a_1, \dots, a_s, x''_k, c_1, \dots, c_m$ і $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_s), y''_k, d_1, \dots, d_m$. Розглянемо лінійний оператор ψ, який переводить перший із цих базисів у другий, причому $\psi(a_i) = \varphi(a_i)$, $1 \le i \le s$, і $\psi(x''_k) = y''_k$. Оскільки ψ переводить ортонормований базис у ортонормований базис, то цей оператор є ортогональним. Крім того, із визначення ψ випливає, що $\psi(x) = \varphi(x)$ для кожного вектора $x \in L$, і

$$\begin{aligned}\psi(x_k) = \psi(x'_k + pr_L(x_k)) = \psi(x'_k) + \psi(pr_L(x_k)) = \\ y'_k + \varphi(pr_L(x_k)) = y'_k + pr_{L'}(y_k) = y_k.\end{aligned}$$

Це завершує доведення.

Приклад 35. *Звести до канонічного вигляду унітарну матрицю*

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Знаходимо характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \det\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \lambda\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \lambda\sqrt{3} \end{pmatrix}\right) =$$
$$\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 1+i-\lambda\sqrt{3} & 1 \\ -1 & 1-i-\lambda\sqrt{3} \end{pmatrix} =$$
$$\frac{1}{3}\left((1-\lambda\sqrt{3}+i)(1-\lambda\sqrt{3}-i)+1\right) =$$
$$\frac{1}{3}\left((1-\lambda\sqrt{3})^2+2\right) = \lambda^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\lambda + 1.$$

Власними числами матриці A є корені $\chi_A(\lambda)$:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{2}i), \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1-\sqrt{2}i).$$

Канонічна форма B матриці A є діагональною матрицею з λ_1, λ_2 на діагоналі:

$$B = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}i & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2}i \end{pmatrix}.$$

Для знаходження власного вектора, що відповідає λ_1, знаходимо фундаментальну систему розв'язків (далі — ФСР) однорідної системи рівнять із матрицею

$$A - \lambda_1 E = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i(1-\sqrt{2}) & 1 \\ -1 & i(-1-\sqrt{2}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i(1-\sqrt{2}) & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ФСР цієї системи $v_1 = (1, i(\sqrt{2}-1))$. Одразу нормуємо вектор v_1:

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}(1, i(\sqrt{2}-1)).$$

Так само знаходимо власний вектор, що відповідає λ_2:

$$A - \lambda_2 E = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i(1+\sqrt{2}) & 1 \\ -1 & i(-1+\sqrt{2}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i(1-\sqrt{2}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

звідки $v_2 = (i(\sqrt{2}-1), 1)$. Нормуємо вектор v_2:

$$u_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}(i(\sqrt{2}-1), 1).$$

Нарешті, виписуємо матрицю переходу C: її стовпчиками є вектори u_1, u_2.

$$C = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1 & i(\sqrt{2}-1) \\ i(\sqrt{2}-1) & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 36. *Звести до канонічного вигляду ортогональну матрицю*

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Спочатку знайдемо характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-2\lambda & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1-2\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1-2\lambda & 1 & -\sqrt{2} \\ 2-2\lambda & 2-2\lambda & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2\lambda \end{vmatrix} = 2(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-2\lambda & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2\lambda \end{vmatrix} =$$

$$2(1-\lambda)\begin{vmatrix} -2\lambda & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2\lambda \end{vmatrix} = 2(1-\lambda)\begin{vmatrix} -2\lambda & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2\lambda \end{vmatrix} =$$

$$2(1-\lambda)(4\lambda^2+4) = 8(1-\lambda)(\lambda^2+1).$$

Отже, матриця A має одне дійсне власне число $\lambda_1 = 1$ і два комплексно спряжених власних числа $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. Згідно алгоритму зведення до канонічного вигляду запишемо $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1\cdot i$, після чого випишемо канонічний вигляд матриці A:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 1$. Для цього знаходимо ФСР системи з матрицею $A - E$:

$$A - E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

ФСР— це один вектор $v_1' = (1, 1, 0)$, нормуючи який отримаємо $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$.

Тепер, згідно алгоритму, знаходимо комплексний власний вектор для одного (довільного) із пари комплексно спряжених власних чисел. Ми візьмемо число $\lambda_2 = i$. Для знаходження власного вектора нам знов доведеться шукати ФСР системи рівнянь, цього разу із матрицею $A - iE$:

$$A - iE = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-2i & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1-2i & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2i \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1-2i & 1 & -\sqrt{2} \\ 2-2i & 2-2i & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-2i & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{2}i \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2i & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -\sqrt{2}i \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2i & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2i & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Фундаментальна система розв'язків — це вектор

$$u = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 1\right) = v_2 + iv_3,$$

де $v_2' = (0, 0, 1)$, $v_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Згідно алгоритму, другий і третій стовпчики матриці переходу — це вектори v_2 і v_3, отримані нормуванням векторів v_2' і v_3' відповідно. Отже, матриця переходу C є такою:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Задачі

5.1 Нехай φ, ψ — лінійні оператори, що діють у евклідовому (чи унітарному) просторі. Довести, що

а) $((\varphi)^*)^* = \varphi$; б) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$; в) $(\alpha\varphi)^* = \overline{\alpha}\varphi^*$;

г) якщо φ — невироджений, то $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$.

5.2 Нехай xOy — прямокутна система координат на площині і φ — проектування площини на вісь Ox паралельно до бісектриси першої і червертої чверті. Знайти спряжений оператор φ^*.

5.3 Нехай $E = L_1 \oplus L_2$ — Розклад евклідового простору на пряму суму двох підпросторів і φ — оператор проектування E на L_1 паралельно до L_2. Знайти спряжений оператор φ^*.

5.4 Нехай e_1, e_2 — ортонормований базис простору $\mathbb{R}^2$ і лінійний оператор φ у базисі f_1, f_2 має матрицю A_f. Знайти матрицю B_f спряженого оператора φ^* у тому ж базисі f_1, f_2, якщо

а) $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = 2e_2$, $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

б) $f_1 = e_1 + 2e_2$, $f_2 = e_2$, $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$.

5.5 Знайти матрицю оператора φ^*, спряженого до φ, у ортонормованому базисі e_1, e_2, e_3, якщо φ переводить вектори a_1, a_2, a_3 у вектори b_1, b_2, b_3 відповідно у кожному з наступних випадків:

а) $a_1 = e_3$, $a_2 = e_2 + e_3$, $a_3 = e_1 + e_2 + e_3$, $b_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $b_2 = 3e_1 + e_2 + 2e_3$, $b_3 = 7e_1 - e_2 + 4e_3$;

б) $a_1 = e_1 - e_3$, $a_2 = e_2$, $a_3 = e_1 - e_2 + 2e_3$, $b_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $b_2 = e_1 - 2e_3$, $b_3 = e_1 - 5e_2 - 4e_3$.

5.6 Нехай у деякому базисі e_1, e_2, e_3 скалярний добуток задано білінійною формою $f = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$, а лінійний оператор φ — матрицею $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю B_e спряженого оператора φ^* у тому ж базисі.

5.7 Нехай у деякому базисі e_1, e_2, e_3 евклідового простору скалярний добуток задано білінійною формою $f = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 6x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$, а лінійний оператор φ — матрицею $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю B_e спряженого оператора φ^* у тому ж базисі.

5.8 Нехай G — матриця Грама деякого базису, і A — матриця лінійного оператора φ. Знайти матрицю B спряженого оператора у тому ж базисі, якщо

а) $G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

б) $G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5.9 Довести, що дійсна матриця A порядку n є ортогональною тоді й лише тоді коли її рядки (чи стовпчики) попарно ортогональні і нормовані.

5.10 Довести, що множина $O(E)$ всіх ортогональних операторів на евклідовому просторі E є групою відносно операції взяття суперпозиції лінійних операторів. Довести аналогічне твердження для множини $U(E)$ всіх унітарних операторів на унітарному просторі E.

5.11 Довести, що якщо лінійний оператор φ в евклідовому (чи унітарному) просторі зберігає довжини всіх векторів, то цей оператор є ортогональним (унітарним).

5.12 Нехай в евклідовому (чи унітарному) просторі задане перетворення φ (не обов'язково лінійне), яке зберігає скалярні добутки, тобто

$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$ для довільних векторів x і y простору. Довести, що φ є лінійним. Навести приклад, який показує, що для того, щоб φ було лінійним, не достатньо вимагати, щоб φ зберігало лише довжини векторів.

5.13 Нехай скалярний добуток векторів евклідового простору E заданий матрицею Грама G у деякому базисі, і φ — лінійний оператор, заданий у тому ж базисі матрицею A. Довести, що φ є ортогональним, тоді й лише тоді, коли φ невироджений і $GA^{-1} = AG$.

5.14 Звести до канонічного вигляду задану унітарну матрицю:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$.

5.15 Звести до канонічного вигляду задану ортогональну матрицю:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6 Самоспряжені оператори

Означення 7. *Лінійний оператор φ у евклідовому чи унітарному просторі E називається* самоспряженим, *якщо виконується умова $\varphi = \varphi^*$.*

У випадку евклідового простору самоспряжені оператори часто називають *симетричними.*

Разом із ортогональними (унітарними) операторами, самоспряжені оператори є важливими прикладами нормальних операторів. Зокрема, із нормальності самоспряжених операторів і відповідного твердження для нормальних операторів випливає, що власні вектори самоспряженого оператора, що відповідають різним власним числам, є ортогональними. Ще однією важливою властивістю самоспряжених операторів є те, що всі їх власні числа є дійсними.

Для формулювання наступної теореми буде потрібне визначення ермітово-симетричої матриці. Комплексна матриця A називається *ермітово-симетричною* (або просто *ермітовою*), якщо $A^t = \overline{A}$.

Теорема 11. *Нехай φ — самоспряжений оператор в евклідовому (унітарному) просторі. Тоді матриця φ у довільному ортонормованому базисі є симетричною (ермітово-симетричною). Навпаки, нехай φ — лінійний оператор в евклідовому (унітарному) просторі. Якщо матриця оператора φ в деякому ортонормованому базисі є симетричною (ермітово-симетричною), то φ є самоспряженим.*

Наступна теорема є теоремою про канонічний вигляд самоспряжених операторів та симетричних матриць (ми наведемо формулювання теореми лише евклідового простору, для випадку унітарного простору справедливе аналогічне твердження, ми його не наводимо, оскільки у цьому розділі розглядаються задачі на зведення до канонічного вигляду лише симетричних матриць).

Теорема 12.

1. *Для довільного самоспряженого оператора φ в евклідовому просторі існує ортонормований власний базис. У цьому базисі матриця φ має канонічний вигляд, тобто є діагональною матрицею.*

2. *Для довільної симетричної дійсної матриці A існують ортогональна та діагональна дійсні матриці C та B, такі, що $B = C^{-1}AC$.*

Алгоритм зведення симетричної матриці до канонічного вигляду. Задано дійсну симетричну матрицю A. Знайти (дійсну) діагональну матрицю B і ортогональну матрицю C — матрицю переходу — такі, що $B = C^{-1}AC$.

1. Знаходимо власні числа матриці A, розв'язавши рівняння $\chi_A(x) = 0$, де $\chi_A(x)$ — характеристичний многочлен матриці A. Нехай λ_1, $\ldots, \lambda_t$ — дійсні власні числа A кратностей відповідно $k_1, \ldots, k_t$. Повинна виконуватись рівність $k_1 + \cdots + k_t = n$, де n — порядок матриці A.

2. Матрицю B — канонічний вигляд матриці A — виписуємо таким чином: B — діагональна матриця порядку n, причому перші k_1 діагональних елементів дорівнюють λ_1, і.т.д., останні k_t діагональних елементів дорівнюють λ_t.

3. Знаходимо базис $v_1, \ldots, v_{k_1}$ власного підпростору V_{λ_1}, який відповідає власному числу λ_1. Для цього знаходимо фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь із матрицею $A - \lambda_1 E_n$, де E_n позначає одиничну матрицю $n \times n$. Повинна виконуватись рівність $\dim(V_{\lambda_1}) = k_1$. Застосовуючи у разі потреби процес ортогоналізації до векторів $v_1, \ldots, v_{k_1}$, знаходимо ортогональний базис V_{λ_1}. Поділивши кожен вектор знайденого ортогонального базису на його норму, отримаємо ортонормований базис $e_1^1, \ldots e_{k_1}^1$ простору V_{λ_1}.

4. Для власних підпросторів $V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_t}$ так само, як у попередньому пункті, знаходимо ортонормовані базиси $e_1^2, \ldots e_{k_2}^2, \ldots, e_1^t, \ldots e_{k_t}^t$.

5. Тепер виписуємо матрицю переходу C: це матриця $n \times n$, стовпчиками якої (зліва направо) є координати векторів

$$e_1^1, \ldots e_{k_1}^1,\ e_1^2, \ldots e_{k_2}^2\ \ \ldots,\ e_1^t, \ldots e_{k_t}^t.$$

Зведення квадратичної форми для головних осей.

Нехай $f(x_1, \ldots, x_n)$ — дійсна квадратична форма і A — її матриця. Оскільки A є симетричною, то за пунктом 2 теореми 12 існує ортогональна матриця C, така, що матриця $B = C^{-1}AC$ є діагональною із власними числами матриці A на діагоналі. Оскільки $C^{-1} = C^t$, то $B = C^tAC$. За формулою (10) B є матрицею еквівалентної до f квадратичної форми g, отриманої із f заміною змінних із матрицею переходу

C. Із діагональності B випливає, що g має канонічний вигляд. Таким чином, будь-яку дійсну квадратичну форму ортогональним перетворенням координат можна звести до канонічного вигляду. Таке зведення називається *зведенням квадратичної форми до головних осей.*

Для того, щоб звести дійсну квадратичну форму f до головних осей, виписуємо її матрицю A, після чого, користуючись наведеним вище алгоритмом, зводимо A до канонічного вигляду: знаходимо ортогональну і діагональну матриці C і B, такі, що $B = C^{-1}AC$. Нехай $B = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Тоді канонічний вигляд квадратичної форми f має вигляд $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$, а матриця переходу до канонічного вигляду збігається із C.

Приклади розв'язування задач

Приклад 37. *Нехай φ і ψ — самоспряжені лінійні оператори в евклідовому (чи унітарному) просторі. Довести, що для того, щоб їх добуток $\varphi\psi$ був самоспряженим необхідно і достатньо виконання рівності $\varphi\psi = \psi\varphi$.*

Оскільки φ і ψ — самоспряжені оператори, то, згідно із прикладом 32, виконуються рівності

$$(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^* = \psi\varphi. \tag{21}$$

Отже, якщо $\varphi\psi = \psi\varphi$, то $(\varphi\psi)^* = \varphi\psi$, тобто оператор $\varphi\psi$ є самоспряженим. Навпаки, якщо $\varphi\psi$ є самоспряженим оператором, то $(\varphi\psi)^* = \varphi\psi$, але тоді $\varphi\psi = \psi\varphi$ внаслідок (21).

Приклад 38. *Звести до канонічного вигляду симетричну матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Спочатку знаходимо власні числа даної матриці.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A-3E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 3-\lambda & -1-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(3-\lambda)^2(3+\lambda).$$

Отже, власними числами матриці A є $\lambda_{1,2} = 3$ і $\lambda_3 = -3$. Тому A зводиться до канонічної матриці

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо ортонормований базис власного підпростору V_3. Для цього спочатку шукаємо ФСР системи із матрицею $A-3E$:

$$A-3E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ФСР буде такою: $u_1 = (-1,0,1)$, $u_2 = (2,1,0)$. Оскільки отримані вектори u_1, u_2 не ортогональні, застосуємо до них процес ортогоналізації: покладемо $v_1' = u_1$, $v_2' = u_2 - \frac{(u_2,v_1')}{(v_1',v_1')}v_1' = u_2 + v_1' = (1,1,1)$. Нормуючи отримані ортогональні вектори, отримуємо ортонормований базис V_3: $v_1 = \frac{v_1'}{|v_1'|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$, $v_2 = \frac{v_2'}{|v_2'|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Тепер знайдемо ортонормований базис підпростору V_{-3}. Для цього, знов-таки, треба знайти ФСР однорідної системи, цього разу із матрицею $A+3E$:

$$A+3E = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 12 & 24 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Нормованим власним вектором буде $v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$.

Нарешті, виписуємо матрицю переходу C: її послідовними стовпчиками є вектори v_1, v_2, v_3:

$$C = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Приклад 39. *Звести квадратичну форму $f = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$ до головних осей.*

Згідно із алгоритмом зведення, виписуємо матрицю A даної квадратичної форми: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Тепер потрібно звести матрицю A до канонічного вигляду за допомогою ортогонального перетворення. Але цю задачу ми розв'язали у попередньому прикладі. Лишається записати еквівалентну до f квадратичну форму канонічного вигляду $g = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2$ (коефіцієнти при квадратах змінних в g — це діагональні елемнети матриці B, знайденої в попередньому прикладі). Матриця переходу дорівнює матриці переходу C із попереднього прикладу: $C = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Задачі

6.1 Нехай φ — самоспряжений оператор в унітарному просторі E. Довести, що $(\varphi(x), x) \in \mathbb{R}$ для довільного $x \in E$.

6.2 Навести приклад двох самоспряжених операторів φ, ψ у просторі $\mathbb{R}^n$, таких, що $\varphi\psi$ не є самоспряженим.

6.3 Нехай E — евклідовий простір, L_1, L_2 — підпростори, такі, що $E = L_1 \oplus L_2$. Довести, що оператор проектування E на L_1 паралельно до L_2 є самоспряженим тоді й лише тоді, коли $L_2 = L_1^{\perp}$.

6.4 Нехай φ — самоспряжений оператор в евклідовому просторі. Довести, що для довільного власного значення λ знайдеться вектор x, такий, що $|x| = 1$ і $\lambda = (\varphi(x), x)$.

6.5 У просторі $\mathbb{R}_n[x]$ зі скалярним добутком $(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ лінійний оператор φ визначено правилом $\varphi(f(x)) = (x^2 - 1)f''(x) + 2xf'(x)$. Довести, що φ є самоспряженим.

6.6 Звести симетричну матрицю A до канонічного вигляду:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6.7 Звести квадратичну форму f до головних осей:

а) $f = 17x_1^2 - 16x_1x_2 + 8x_1x_3 + 17x_2^2 - 8x_2x_3 + 11x_3^2$;

б) $f = 6x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 7x_1x_3$;

в) $f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$;

г) $f = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

Література

[1] *Сборник задач по алгебре* под редакцией А.И.Кострикина. М.: Физматлит, 2001.

[2] И.В. Проскуряков *Сборник задач по линейной алгебре.* М.: Наука, 1984.

[3] Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский *Сборник задач по высшей алгебре* М.: Наука, 1977.

[4] С.А. Овсієнко, В.С. Мазорчук, Н.С. Головащук *Лінійна алгебра. Системи лінійних рівнянь.* К.: ВПЦ Київський університет, 2002.

[5] С.А. Овсієнко, В.С. Мазорчук, Н.С. Головащук *Лінійна алгебра. Матриці і детермінанти.* К.: ВПЦ Київський університет, 2002.

[6] В.С. Мазорчук *Жорданова нормальна форма.* К.: ВПЦ Київський університет, 1998.

[7] С. Т. Завало *Курс алгебри.* К.: Вища школа, 1985.

[8] А.Г. Курош *Курс высшей алгебры.* М.: Наука, 1975.

[9] Д.К. Фаддеев *Лекции по алгебре.* М.: Наука, 1984.

[10] М.М. Постников *Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра.* М.: Наука, 1986.